CÔNICAS

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas foram digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 e 2022 (semestres 2021.1 a 2022.1).

Voltando à Geometria Analítica no Plano, ou seja, **com duas coordenadas**, vimos que as equações de 1º.grau correspondem às retas. Queremos investigar quais e como são as figuras que têm equação da forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Se $a = 0 = b = c$, caímos no caso de 1º.grau, o qual já foi estudado. Portanto, vamos supor que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Qualquer conjunto de pontos que satisfaça algum tipo de equação será chamado de **curva** e qualquer curva associada a alguma equação como a citada acima será chamada de **cônica**. Quando a cônica Γ for definida pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, escreveremos

$$\Gamma\colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Os termos "ax^2", "bxy" e "cy^2" são os termos de 2º.grau (ou de grau **2**), "dx" e "ey" são os termos de 1º.grau (ou de grau **1**), enquanto "f" é o termo independente. O termo "bxy" é chamado de termo **misto**.

Chamamos atenção para o fato que a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ pode ser escrita matricialmente como

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Ou ainda, por

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \ .$$

A matriz (simétrica) $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ é chamada **matriz associada ao polinômio "**$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$**"**. A matriz $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ e o seu determinante (i.e. $ac - \frac{b^2}{4}$) também merecem destaque.

Exemplo 1. *Algumas exemplos de "cônicas":*

1. *o conjunto unitário $\{(0,0)\}$, que pode ser representado por $x^2 + y^2 = 0$.*
2. *a reta $x + y = 1$, que pode ser representado por $(x + y - 1)^2 = x^2 + 2xy + y - 2x - 2y + 1 = 0$.*
3. *a união das retas concorrentes $x + y = 0$ e $x - y = 0$, que pode ser representado por $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$.*
4. *a união das retas paralelas $x + y = 0$ e $x + y - 1 = 0$, que pode ser representado por $(x + y)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$.*
5. *o conjunto vazio, que pode ser representado pela equação $4x^2 + 23y^2 + 100 = 0$*

Date: 2023.

Mas quanto a $x^2 - 4y^2 = 1$? Qual cônica é essa? Qual curva é ela? Vamos estudar todas as possibilidades para as equações de 2º.grau nas duas variáveis. Primeira estudaremos algumas curvas para construirmos suas equações. Num segundo momento vamos aprender a identificar a curva quando nos é dada uma equação de 2º.grau.

1. Mudanças no sistema de coordenadas

Quando tomamos uma cônica $\Gamma\colon ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, a existência de "zeros" vai facilitar sua identificação. Por exemplo, o termo misto será um dos fatores que mais dificultam o reconhecimento da cônica. Portanto mudanças no sistema de coordenadas são ferramentas importantes para reescrever Γ num novo sistema no qual tenhamos mais coeficientes nulos.

Quando efetuamos tais mudanças um cuidado é essencial: **não se pode mudar a geometria do plano!** E o que isto significa? Significa que distâncias devem ser mantidas, assim como medidas de ângulos! Veremos no decorrer deste texto que as cônicas são definidas conforme condições envolvendo distância a um ponto, distâncias a dois pontos e até distância a uma reta. Dado que esses cálculos são determinados pelas *coordenadas* dos pontos, devemos ter o cuidado que as distâncias continuem as mesmas ainda depois da mudança de coordenadas. Esse cuidado vai garantir que as condições que definiram a cônica mantenham-se exatamente as mesmas, o qual vai facilitar a determinação da cônica e dos seus parâmetros. Duas serão as mudanças que usaremos e que garantem não mudança na geometria: as **translações** e as **rotações**.

2. Translação

Temos uma **Translação** quando mudamos a origem do sistema mas mantemos sua base.

Proposição 1. *Sejam Σ e Σ' sistemas de coordenadas de mesma base e origens O e O', respectivamente. Se $O' = (h,k)_\Sigma$, então*

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases},$$

para todo $X = (u,v)_{\Sigma'} = (x,y)_\Sigma$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ a base que os dois sistemas compartilham. Fixemos $X = (u,v)_{\Sigma'} = (x,y)_\Sigma$. Daí $\overrightarrow{OX} = (x,y)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{O'X} = (u,v)_\mathcal{B}$. Como $\overrightarrow{OO'} = (h,k)_\mathcal{B}$, induzimos que

$$(x,y)_\mathcal{B} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = (h,k)_\mathcal{B} + (u,v)_\mathcal{B} ,$$

e consequentemente, $x = u + h$ e $y = v + k$. □

Uma vez que a base foi mantida intacta na translação, as coordenadas dos vetores continuam as mesmas. Isso garante que medidas de ângulos e distâncias são as mesmas depois da translação.

Exercício 1. *Determine a nova equação das retas quando muda-se a origem para o ponto dado:*

(1) $x = 0$ *e* $(1,-1)$
(2) $y = 1$ *e* $(-\frac{1}{2},1)$
(3) $x + y = 1$ *e* $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
(4) $2x - y - 3 = 0$ *e* $(-1,3)$
(5) $x = y$ *e* $(-1,2)$
(6) $x + y = 0$ *e* $(0,-4)$

Exercício 2. *Determine a antiga equação das retas quando mudou-se a origem para o ponto dado:*

(1) $u = 0$ *e* $(1,-1)$
(2) $v = 1$ *e* $(-\frac{1}{3},1)$
(3) $u + v = 2$ *e* $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
(4) $2v - u - 3 = 0$ *e* $(-3,1)$
(5) $u + v = -1$ *e* $(1,-2)$
(6) $u + v = 0$ *e* $(4,0)$

Aplicando a translação da proposição anterior à equação $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, observamos que:

$$\begin{gathered} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a(u+h)^2 + b(u+h)(v+k) + c(y+k)^2 + d(u+h) + e(v+k) + f = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0 , \end{gathered}$$

onde

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c,$$

$$d' = 2ah + bk + d = \begin{pmatrix} 2a & b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e' = bh + 2ck + e = \begin{pmatrix} b & 2c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$f' = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 2. *Nas condições estudadas até o momento,* $\begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}.$

Demonstração. Tomando a terceira coluna menos h vezes a primeira coluna menos k vezes a segunda, deduzimos que

$$\begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & ah + \frac{bk}{2} + \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{bh}{2} + ck + \frac{e}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & \alpha \end{vmatrix},$$

onde $\alpha = f' - \frac{d'h}{2} - \frac{e'k}{2}$. Por sua vez, tomando a terceira linha menos h vezes a primeira linha menos k vezes a segunda, concluímos que

$$\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ ah + \frac{bk}{2} + \frac{d}{2} & \frac{bh}{2} + ck + \frac{e}{2} & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & \beta \end{vmatrix},$$

onde $\beta = \alpha - \frac{dh}{2} - \frac{ek}{2} = f' - \frac{d'h}{2} - \frac{e'k}{2} - \frac{dh}{2} - \frac{ek}{2}$. Mas $f' = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$ e ainda

$$f' = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ah + \frac{bk}{2} + \frac{d}{2} \\ \frac{bh}{2} + ck + \frac{e}{2} \\ \frac{dh}{2} + \frac{ek}{2} + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d'}{2} \\ \frac{e'}{2} \\ \frac{dh}{2} + \frac{ek}{2} + f \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{d'h}{2} + \frac{e'k}{2} + \frac{dh}{2} + \frac{ek}{2} + f.$$

Portanto $\beta = f$ e concluímos a tese. □

Uma primeira observação importante é que a translação **não** muda os coeficientes dos termos de 2º.grau e, sendo assim, não é indicada para eliminar o termo misto, por exemplo. Ainda, a translação "anula" o termo independente se, e somente se, (h, k) for elemento da cônica. Por fim, os termos de 1º.grau são eliminados se, e somente se,

$$\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se (h, k) é solução deste último sistema, então o termo independente da equação da cônica no sistema Σ', que é $f' = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$, pode ser calculado por:

$$f' = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dh+ek}{2} + f \end{pmatrix} = \frac{dh+ek}{2} + f = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix},$$

Se o número $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$, então o sistema tem solução única. Caso $4ac = b^2$, este pode não ter solução ou ter infinitas soluções.

Exercício 3. *Ache translação que elimina os termos de 1º.grau para as seguintes equações de 2º.grau e apresente-as depois da translação:*

(1) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$
(2) $25x^2+16y^2+50x+64y-311=0$
(3) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$
(4) $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$
(5) $x^2-4y^2+6x+24y-31=0$
(6) $25x^2-4y^2+40y=0$
(7) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$
(8) $4x^2-4xy+7y^2+12x+6y-9=0$
(9) $(x+1)(y-2)=1$
(10) $3x^2+2xy+3y^2+6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$
(11) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$
(12) $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$

Exercício 4. *Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que $4ac=b^2$. Mostre que:*

(1) $ax^2+bxy+cy^2=\frac{(2ax+by)^2}{4a}$, *se* $a\neq 0$.
(2) $ax^2+bxy+cy^2=\frac{(bx+2cy)^2}{4c}$, *se* $c\neq 0$.

Lema 3. *Sejam $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ tais que $ac=\frac{b^2}{4}$. Então*

$$a\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2}\end{vmatrix}^2 \qquad e \qquad c\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ c & \frac{e}{2}\end{vmatrix}^2 .$$

Demonstração. Tomando a segunda linha menos $\frac{b}{2}$ vezes a primeira linha, concluímos que

$$a\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{ab}{2} & \frac{b^2}{4} & \frac{ae}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ 0 & 0 & \frac{ae}{2}-\frac{bd}{4}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=-\left(\tfrac{ae}{2}-\tfrac{bd}{4}\right)\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2}\end{vmatrix}^2 .$$

Analogamente demonstra-se a outra igualdade do enunciado do lema. □

Lema 4. *Sejam $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ onde $a^2+b^2+c^2\neq 0$. O sistema linear* $\begin{cases} ah+\frac{b}{2}k+\frac{d}{2}=0\\ \frac{b}{2}h+ck+\frac{e}{2}=0\end{cases}$ *(em (h,k)) admite infinitas soluções se, e somente se,* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{vmatrix}=0.$

Demonstração. Basta perceber que o citado sistema linear tem infinitas soluções se, e somente se, uma equação é múltiplo da outra. □

Teorema 5. *Seja $\Gamma\colon ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{vmatrix}=0$ *e $a\neq 0$. Seja* $D=\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2}\\ \frac{d}{2} & f\end{vmatrix}$.

(1) Se $D<0$, então Γ representa a união de duas retas paralelas distintas.
(2) Se $D=0$, então Γ representa uma reta.
(3) Se $D>0$, então Γ representa o conjunto vazio.

Demonstração. Uma vez que $a\neq 0$, seja $\lambda=\frac{b}{2a}$. Daí $b=2a\lambda$ e $c=a\lambda^2$. Pelo lema 3, segue que $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2}\end{vmatrix}=0$ e $e=\lambda d$. Portanto

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=ax^2+2a\lambda xy+a\lambda^2y^2+dx+\lambda dy+f=a(x+\lambda y)^2+d(x+\lambda y)+f\ .$$

O discriminante da equação de 2º.grau $au^2+du+f=0$ (em u) é $-4D$. Sendo assim:

(1) Se $D<0$, sejam u_1 e u_2 as raízes distintas da equação $au^2+du+f=0$. Neste caso,

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+\lambda y=u_1 \text{ ou } x+\lambda y=u_2\ ,$$

o que corresponde à união de duas retas paralelas distintas.

(2) Se $D=0$, seja u_0 a solução (única) da equação $au^2+du+f=0$. Neste caso,

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+\lambda y=u_0\ ,$$

o que corresponde a uma reta.

(3) Se $D > 0$, então a equação $au^2 + du + f = 0$ não admite solução. Neste caso, não há pontos do plano que satisfazem "$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$" e esta representa o conjunto vazio. □

Exercício 5. *Seja* $\Gamma\colon ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e* $c \neq 0$. *Seja* $C = \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$. *Mostre que:*

(1) Se $C < 0$, *então* Γ *representa a união de duas retas paralelas distintas.*
(2) Se $C = 0$, *então* Γ *representa uma reta.*
(3) Se $C > 0$, *então* Γ *representa o conjunto vazio.*

Exercício 6. *As cônicas abaixo determinam retas paralelas ou o conjunto vazio. Determine qual é a situação de cada e, nos casos de retas, determine as retas que são representadas.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
(2) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 2x - 7y = 0$
(3) $3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$
(4) $7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$
(5) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$
(6) $4x^2 - 4xy + y^2 - 16\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 81 = 0$

Exercício 7. *Determine condição sobre* $k \in \mathbb{R}$ *tal que a cônica dada por* $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 12y + k = 0$ ***não seja vazia.***

3. Rotação

Uma **Rotação** é uma mudança no sistema de coordenadas que mantém a origem do sistema e a faz seguinte mudança na base: se $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é base ortonormal inicial, então $\mathcal{C} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ é a nova base, onde $f_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{f_2} = \vec{f_1}^{\perp} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)_{\mathcal{B}}$, para $\theta \in \mathbb{R}$. Se O é um ponto e os sistemas são $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O, \mathcal{C})$, para todo $X = (u, v)_{\Sigma'} = (x, y)_{\Sigma}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

pois

$$\overrightarrow{OX} = u\vec{f_1} + v\vec{f_2} = u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{\mathcal{B}} + v(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)_{\mathcal{B}} = \Big((\cos\theta)u - (\operatorname{sen}\theta)v, (\operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta)v\Big)_{\mathcal{B}}.$$

É importante notar que $\mathcal{C}$ é base ortonormal e, se $\vec{v} = (u, v)_{\mathcal{C}} = (x, y)_{\mathcal{B}}$, então

$$x^2 + y^2 = \big((\cos\theta)u - (\operatorname{sen}\theta)v\big)^2 + \big((\operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta)v\big)^2 =$$
$$= (\cos^2\theta)u^2 - 2(\cos\theta\operatorname{sen}\theta)uv + (\operatorname{sen}^2\theta)v^2 + (\operatorname{sen}^2\theta)u^2 + 2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)uv + (\cos^2\theta)v^2 =$$
$$= u^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + v^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = u^2 + v^2 .$$

Portanto normas de vetores são mantidas e consequentemente produtos escalares entre vetores serão mantidos. Isso garante que medidas de ângulos e distâncias são mantidas depois da rotação.

A matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ será chamada de **matriz da rotação** θ.

Exercício 8. *Mostre que, para todo* $\theta \in \mathbb{R}$, *a matriz da rotação* θ *é inversível e sua inversa coincide com sua transposta.*

Portanto, pelo exercício acima,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Exercício 9. *Determine a nova equação das retas quando aplica-se a rotação dada:*

(1) $x = 0$ *e* $\theta = \frac{\pi}{4}$
(2) $y = 1$ *e* $\theta = -\frac{\pi}{2}$
(3) $x + y = 1$ *e* $\theta = \frac{\pi}{3}$
(4) $2x - y - 3 = 0$ *e* $\theta = \pi$
(5) $x = y$ *e* $\theta = \frac{3\pi}{4}$
(6) $x + y = 0$ *e* $\theta = \arccos\frac{1}{5}$

Exercício 10. *Determine a antiga equação das retas quando rotacionou-se pelo valor dado:*

(1) $u = 0$ *e* $\theta = \frac{\pi}{2}$
(2) $v = 1$ *e* $\theta = -\frac{\pi}{2}$
(3) $u + v = 2$ *e* $\theta = \frac{\pi}{4}$
(4) $2v - u - 3 = 0$ *e* $\theta = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$
(5) $u + v = 1$ *e* $\theta = \frac{3\pi}{4}$
(6) $u + v = 0$ *e* $\theta = -\pi$

Proposição 6. *Seja* $s\colon ax + by + c = 0$ *uma reta. Existe rotação tal que* s *é vertical no novo sistema de coordenadas.*

Demonstração. Seja $\vec{n} = (a, b)$ que sabemos ser não nulo. Sejam $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\theta = \frac{a}{r}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$. Tomemos a rotação por θ. Daí

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow r\cos\theta(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta) + r\operatorname{sen}\theta(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + c = 0 \Leftrightarrow ru + c = 0\ .$$

Portanto $s\colon u + \frac{c}{r} = 0$, que é reta vertical no novo sistema de coordenadas. □

Exercício 11. *Mostre resultado análogo ao da proposição para ser horizontal.*

Aplicando uma rotação à equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, observamos que:

$$\begin{gathered} a(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + c(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta)^2 + \\ + d(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta) + e(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + f = 0 \\ \Leftrightarrow \quad a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0, \end{gathered}$$

onde

$$\begin{gathered} a' = a(\cos^2\theta) + b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\operatorname{sen}^2\theta), \\ b' = b\cos(2\theta) - (a - c)\operatorname{sen}(2\theta) \\ c' = a(\operatorname{sen}^2\theta) - b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\cos^2\theta) \\ d' = d(\cos\theta) + e(\operatorname{sen}\theta), \\ e' = -d(\operatorname{sen}\theta) + e(\cos\theta) \quad \text{e} \\ f' = f\ . \end{gathered}$$

Essas mesmas igualdades também podem ser estabelecidas quando lembramos que

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + f = 0.$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ .$$

Exercício 12. *Mostre que* $\begin{pmatrix} b' \\ a' - c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a - c \end{pmatrix}$.

Exercício 13. *Mostre que* $a' - c' = b' = 0$ *se, e somente se,* $a - c = b = 0$.

Proposição 7. *Nas condições estudadas até o momento,* $a' + c' = a + c$ *e* $a'c' - \frac{(b')^2}{4} = ac - \frac{b^2}{4}$.

Demonstração. Observamos que

$$\begin{gathered} a' + c' = \Big(a(\cos^2\theta) + b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\operatorname{sen}^2\theta)\Big) + \Big(a(\operatorname{sen}^2\theta) - b(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c(\cos^2\theta)\Big) = \\ = a(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + c(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = a + c. \end{gathered}$$

enquanto

$$a'c' - \tfrac{(b')^2}{4} = \det\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = ac - \tfrac{b^2}{4}.$$

□

Proposição 8. *Nas condições estudadas até o momento,* $\begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.

Demonstração. Mostra-se que

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} & \frac{d'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' & \frac{e'}{2} \\ \frac{d'}{2} & \frac{e'}{2} & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dado que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ têm determinante 1, segue a tese. □

Conforme já mencionado, o termo misto é aquele que mais dificulta o reconhecimento da cônica. A rotação dá possibilidade de eliminarmos o termo misto de $a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$. E para tanto, $b' = 0$ se, e somente se,

$$(a - c) \cdot \operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta) .$$

Proposição 9. *Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $(a - c) \cdot \operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)$.*

Demonstração. Se $a = c$, basta tomar $\theta = \frac{\pi}{4}$. Suponhamos $a \neq c$ e seja $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a-c}\right)$. Portanto $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{b}{a-c}$ e $(a - c)\operatorname{sen}(2\theta) = b\cos(2\theta)$. □

Teorema 10. *Se $b \neq 0$ e $(a - c)\operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)$, então $a' \neq c'$ e a' e c' são raízes do polinômio* $p(t) = \begin{vmatrix} a - t & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - t \end{vmatrix}$.

Demonstração. Suponhamos que $b \neq 0$ e $(a - c)\operatorname{sen}(2\theta) = b \cdot \cos(2\theta)$. Daí $b' = 0$ e, pelo exercício 13, $a' \neq c'$. Pelo lema 7, $a' + c' = a + c$ e $a'c' = ac - \frac{b^2}{4}$. Logo

$$p(t) = \begin{vmatrix} a - t & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - t \end{vmatrix} = (t-a)(t-c) - \frac{b^2}{4} = t^2 - (a+c)t + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) = t^2 - (a'+c')t + a'c' = (t-a')(t-c') ,$$

que tem exatamente a' e c' como raízes. □

Se $M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ e I é a matriz identidade 2×2, então o polinômio citado no teorema é

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} a - t & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - t \end{pmatrix} = \det(M - tI) .$$

Corolário 1. *Nas mesmas condições do teorema anterior, $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ resolve o sistema*

$$\begin{pmatrix} a - a' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

enquanto $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ resolve o sistema

$$\begin{pmatrix} a - c' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Sendo assim,

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} .$$

Concluímos que

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = a' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a - a' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Analogamente, concluímos que $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ resolve o sistema $\begin{pmatrix} a - c' & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Lema 11. *Sejam N uma matriz 2×2 simétrica e $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Se $\lambda\neq\mu$, $N\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ e $N\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$, então $(\alpha,\beta)\perp(\gamma,\delta)$.*

Demonstração. Seja $N=\begin{pmatrix}p & q\\ q & r\end{pmatrix}$ e suponhamos $\begin{cases}p\alpha+q\beta=\lambda\alpha\\ q\alpha+r\beta=\lambda\beta\\ p\gamma+q\delta=\mu\gamma\\ q\gamma+r\delta=\mu\delta\end{cases}$. Sejam $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ e $\vec{v}=(\gamma,\delta)$. Logo

$$\lambda(\vec{u}\bullet\vec{v})=(\lambda\vec{u})\bullet\vec{v}=(p\alpha+q\beta,q\alpha+r\beta)\bullet\vec{v}=(p\alpha+q\beta)\gamma+(q\alpha+r\beta)\delta=$$
$$=\alpha(p\gamma+q\delta)+\beta(q\gamma+r\delta)=\vec{u}\bullet(p\gamma+q\delta,q\gamma+r\delta)=\vec{u}\bullet(\mu\vec{v})=\mu(\vec{u}\bullet\vec{v}).$$

Se $\lambda\neq\mu$, então $\vec{u}\perp\vec{v}$. □

Lema 12. *Nas mesmas condições do teorema 10, se $\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=a'\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, então $\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}=c'\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$.*

Demonstração. Seja $M=\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}$. Pelo corolário 1, $M\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=c'\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$. Se $M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=a'\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, então $(\alpha,\beta)\perp(-\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$, pelo lema anterior e dado que $a'\neq c'$. Portanto, $(-\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ e $(-\beta,\alpha)$ são paralelos e existe $\nu\in\mathbb{R}$ tal que $(-\beta,\alpha)=\nu(-\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$. Logo $N\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}=c'\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$. □

Exercício 14. *Ache rotação que elimina o termo misto para as seguintes equações de 2º.grau e apresente-as depois da rotação:*

(1) $4x^2-4xy+7y^2-24=0$
(2) $xy=1$
(3) $3x^2+3xy+3y^2-4=0$
(4) $7x^2+6xy-y^2=0$
(5) $5x^2+2y^2+2xy+2=0$
(6) $32x^2+52xy-7y^2+180=0$
(7) $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$
(8) $8x^2+6xy-9=0$
(9) $x^2+2xy+y^2-8\sqrt{2}x+8\sqrt{2}y=0$
(10) $x^2+2xy+y^2=0$
(11) $4x^2+28xy+49y^2-\frac{1}{4}=0$
(12) $y^2-2xy+x^2+16x+16y=0$

4. Parábolas

Fixemos uma reta r e ponto $F\notin r$. A **párabola de foco F e diretriz** r é a curva determinada pelos pontos que equidistam de F e de r. Sendo assim, se Γ é parábola determinada pela diretriz r e foco F, então, para um ponto X,

$$X\in\Gamma\quad\Leftrightarrow\quad d(X,F)=d(X,r)\ .$$

Sejam H o ponto de r mais próximo de F e V o ponto médio do segmento $\overline{FH}$. Naturalmente $d(V,F)=d(V,H)$. Como $\overrightarrow{HV}\perp r$ e $H\in r$, deduzimos que $d(V,r)=d(V,H)$. Sendo assim, $d(V,F)=d(V,r)$, ou seja, V é ponto da parábola. Esse ponto é chamado de **vértice** da parábola.

Definição 1. *Seja Γ uma parábola de foco F e vértice V. A reta $\overleftrightarrow{VF}$ é chamada de **reta focal de** Γ.*

Além disto, a reta focal é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.

Se $F=(\alpha,\beta)$ e $r\colon Ax+By+C=0$, onde $A^2+B^2\neq 0$, então, para $X=(x,y)$,

$X\in\Gamma\Leftrightarrow\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\Leftrightarrow(A^2+B^2)\left((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right)=(Ax+By+C)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(A^2+B^2)(x^2-2\alpha+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2)=A^2x^2+B^2y^2+C^2+2ABxy+2ACx+2BCy\Leftrightarrow$

$B^2x^2-2ABxy+A^2y^2-2\Big(\alpha(A^2+B^2)+AC\Big)x-2\Big(\beta(A^2+B^2)+BC\Big)y+\Big((A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2)-C^2\Big)=0.$

Teorema 13. *Toda parábola admite equação* $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, *onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0.$

Demonstração. Tomemos a equação desenvolvida nos parágrafos acima e sejam $a=B^2, b=-2AB, c=A^2, d=-2\Big(\alpha(A^2+B^2)+AC\Big), e=-2\Big(\beta(A^2+B^2)+BC\Big)$ e $f=\Big((A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2)-C^2\Big)$. O número $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B^2 & -AB \\ -AB & A^2 \end{vmatrix}$ é nulo. Seja $D=\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$. Pelo lema 3,

$$B^2D = -\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix}^2 = -\begin{vmatrix} B^2 & -\alpha(A^2+B^2)-AC \\ -AB & -\beta(A^2+B^2)-BC \end{vmatrix}^2 = -B^2\begin{vmatrix} B & \alpha(A^2+B^2)+AC \\ -A & \beta(A^2+B^2)+BC \end{vmatrix}^2 =$$
$$= -B^2\Big(B(\beta(A^2+B^2)+BC)+A(\alpha(A^2+B^2)+AC)\Big)^2 = -B^2(A^2+B^2)^2(A\alpha+B\beta+C)^2\ .$$

Analogamente, mostra-se que $A^2D=-A^2(A^2+B^2)^2(A\alpha+B\beta+C)^2$. Dado que $A^2+B^2\neq 0$, deduzimos que $D=-(A^2+B^2)^2(A\alpha+B\beta+C)^2$. Como $F\notin r$, $A\alpha+B\beta+C\neq 0$ e completamos a tese do teorema. □

Vale notar que $B^2x^2-2ABxy+A^2y^2=(Bx-Ay)^2$ e que $B(x-\alpha)-A(y-\beta)=0$ é equação da reta que passa pelo ponto F e é perpendicular à reta r, ou seja, a reta focal. Ainda, o coeficente do termo misto é 0 se, e somente se, $A=0$ ou $B=0$, ou equivalentemente, a reta diretriz for **paralela a um dos eixos coordenados**. Mais precisamente:
(1) se r é horizontal (i.e. $A=0\neq B$), então Γ tem um único termo de 2º.grau, que é o termo com a primeira coordenada ao quadrado.
(2) se r é vertical (i.e. $A\neq 0=B$), então Γ tem um único termo de 2º.grau, que é o termo com a segunda coordenada ao quadrado.

Vamos estudar as parábolas que têm diretriz horizontal. Seja Γ a parábola de vértice $V=(h,k)$, diretriz r e foco F, onde $\overrightarrow{VF}=(0,p)\neq\vec{0}$. Daí $F=V+\overrightarrow{VF}=(h,k+p)$ e $H=V-\overrightarrow{VF}=(h,k-p)$. Como r deve passar por H e ser perpendicular a $\overrightarrow{VF}$, então $r\colon y-k+p=0$. Se Γ é a parábola de foco F e diretriz r,

$$X=(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+\big(y-(k+p)\big)^2}=|y-k+p| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-h)^2+\big((y-k)-p\big)^2=\big((y-k)+p\big)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2-2p(y-k)+p^2=(y-k)^2+2p(y-k)+p^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4p(y-k)=(x-h)^2.$$

Se "abrimos" o quadrado, obtemos:

$$\Gamma\colon y=\frac{1}{4p}x^2-\frac{h}{2p}x+\frac{h^2}{4p}+k,$$

que é expressão conhecida desde o ensino médio.

Teorema 14. *Sejam* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *onde* $a\neq 0$. *O conjunto dos pontos* (x,y) *do plano, que satisfazem a equação* $y=ax^2+bx+c$, *é uma parábola de vértice* $V=\big(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\big)$, *foco* $F=\big(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\big)$ *e diretriz* $r\colon y+\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}=0$, *onde* $\Delta=b^2-4ac$

Demonstração. Dado que $a\neq 0$,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\ .$$

Logo

$$y=ax^2+bx+c \quad\Leftrightarrow\quad y+\frac{\Delta}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{a}\left(y+\frac{\Delta}{4a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ .$$

Sejam $h = -\frac{b}{2a}$, $k = -\frac{\Delta}{4a}$, $p = \frac{1}{4a}$, $V = (h,k)$, $F = (h,k+p)$, r a reta perpendicular ao vetor $(0,p)$ que passa por $(h,k-p)$ e Γ a parábola de foco F e diretriz r. Para $X = (x,y)$,

$$X \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 4p(y-k) = (x-h)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{a}\left(y + \tfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = ax^2 + bx + c \ .$$

□

Corolário 2. *Seja Γ uma parábola. Existe sistema de coordenadas (ortogonal) tal que, para algum $a \neq 0$, $\Gamma\colon y = ax^2$.*

Demonstração. Sejam F, V e r o foco, o vértice e a diretriz da Γ, respectivamente. Seja $\overrightarrow{f_1}$ um vetor unitário e diretor de r. O sistema de coordenadas $(V, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1}^{\perp})$ é ortogonal. Neste sistema $V = (0,0)$ e $\overrightarrow{VF} = (0,p)$, para algum $p \neq 0$. Se $a = \frac{1}{4p}$, então

$$X = (x,y) \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 4py = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{x^2}{4p} = ax^2 \ .$$

□

Observamos que a demonstração do teorema anterior já nos dá um roteiro para conseguir os elementos que determinam a parábola:

(1) se a equação é da forma $y = ax^2 + bx + c$, então **a parábola tem diretriz horizontal**.
(2) tome a expressão $ax^2 + bx$ e a escreva como $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$.
(3) tome a expressão $x^2 + \frac{b}{a}x$ e some e substraia a ela algo para **completar um quadrado**, mais precisamente, some e subtraia $\frac{b^2}{4a^2}$ pois $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
(4) passe para o outro lado da igualdade tudo que "ficou de fora do quadrado perfeito".

Exemplo 2. *Como obter os elementos que determinaram a parábola $\Gamma\colon y = x^2$? Como determinar seu foco e a diretriz? Observamos que*

$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1(y-0) = (x-0)^2 \ .$$

Portanto, podemos tomar $h = 0$, $k = 0$ e $4p = 1$. Obtemos que o vértice é $V = (0,0)$, enquanto $\overrightarrow{VF} = \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Daí o foco é $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$. A diretriz é perpendicular a $\overrightarrow{VF}$ e e passa pelo ponto $H = V - \overrightarrow{VF} = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$, ou seja, a diretriz é a reta de equação $y = -\frac{1}{4}$, que já sabíamos ser horizontal.

Exercício 15. *Sejam V e F vértice e foco de uma parábola Γ. Suponha que $V = (h,k)$ e $\overrightarrow{VF} = (p,0)$, com $p \neq 0$. Mostre que $\Gamma\colon 4p(x-h) = (y-k)^2$.*

Exercício 16. *Determinar o vértice, o foco e uma equação da diretriz de cada uma das **parábolas**:*

(1) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$
(2) $y = (x-1)(x+2)$
(3) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$
(4) $y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$
(5) $y = \frac{x^2}{4} - 2x - 1$
(6) $x^2 - 12y + 72 = 0$
(7) $y = 4x - x^2$
(8) $-8x + y^2 - 6y + 17 = 0$
(9) $y - x^2 + 6x = 9$
(10) $y = x^2 + 4x + 6$
(11) $y = x^2 - 4x + 2$
(12) $x = y^2 - 6y + 8$
(13) $x = y^2 + y + 1$
(14) $x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$
(15) $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$

Exercício 17. *Para cada item, determine uma equação da parábola a partir das informações dadas. Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola, nos casos onde não houver a informação.*

(1) foco $F = (3,4)$ e diretriz $d\colon x - 1 = 0$.
(2) foco $F = (-2,3)$ e diretriz $d\colon y + 6 = 0$.
(3) vértice $V = (1,2)$, reta focal paralelo ao eixo das abscissas e $P = (-1,6)$ é ponto da parábola.
(4) reta focal paralelo ao eixo das ordenadas e os pontos $P = (0,0)$, $Q = (1,-3)$ e $R = (-4,-8)$ pertencem à parábola.
(5) reta focal $f\colon y - 5 = 0$, diretriz $d\colon x - 3 = 0$ e vértice sobre a reta $r\colon y = 2x + 3$.

Proposição 15. *O ponto da parábola mais próxima da sua diretriz é seu vértice. Ainda, uma parábola não encontra sua diretriz.*

Demonstração. Sejam F, V e r o foco, o vértice e a diretriz de uma parábola, respectivamente. Fixemos um sistema de coordenadas cuja origem seja V e para o qual a r seja horizontal. Então $V = (0,0)$, $\overrightarrow{VF} = (0,p)$, para algum $p \neq 0$. Ainda $r\colon y + p = 0$, $\Gamma\colon 4py = x^2$ e $d(V,r) = |p|$. Se $X = (x,y) \in \Gamma$, então

$$d(X,r) = |y+p| = \left|\frac{x^2}{4p} + p\right| = \frac{x^2 + 4p^2}{4|p|} \geq \frac{4p^2}{4|p|} = |p| = d(V,r) \ .$$

Consequentemente, $\Gamma \cap r = \emptyset$. □

Fizemos o reconhecimento de parábolas com diretriz paralela a algum dos eixos coordenados. O teorema a seguir nos ajuda a reconhecer uma parábola qualquer.

Teorema 16. *Seja* $\Gamma\colon ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$ *e* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0.$

Então Γ *descreve uma* ***parábola****.*

Demonstração. Estudemos primeiro o caso no qual $a \neq 0$. Logo

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = \tfrac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abxy+b^2y^2\right)+dx+ey+f = \tfrac{1}{4a}\left(2ax+by\right)^2+dx+ey+f.$$

Seja $s=\sqrt{4a^2+b^2}$, que necessariamente é não nulo. Neste caso usemos a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{s} & -\frac{b}{s} \\ \frac{b}{s} & \frac{2a}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Logo

$$2ax+by = 2a\left(\tfrac{2au-bv}{s}\right)+b\left(\tfrac{bu+2av}{s}\right) = \tfrac{(4a^2+b^2)u}{s} = \tfrac{s^2u}{s} = su \qquad \text{e}$$
$$dx+ey = d\left(\tfrac{2au-bv}{s}\right)+e\left(\tfrac{bu+2av}{s}\right) = \tfrac{(2da+eb)u}{s}+\tfrac{(2ea-db)v}{s}.$$

Sendo assim, depois da rotação, Γ terá equação:

$$\frac{s^2u^2}{4a}+\frac{(2da+eb)u}{s}+\frac{(2ea-db)v}{s}+f=0.$$

Dado que $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0$ e que $a \neq 0$, pelo lema 3, conclui-se que $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = \frac{2ae-bd}{4} \neq 0$. Consequentemente, $2ea-db \neq 0$ e podemos escrever

$$\Gamma\colon v = \left(\frac{s^3}{4a(db-2ea)}\right)u^2+\left(\frac{2da+eb}{db-2ea}\right)u+\frac{sf}{db-2ea}\ ,$$

que é equação de parábola com diretriz horizontal (no novo sistema), pelo teorema 14.

Caso $a=0$, induzimos que $b=0$ e $c\neq 0$. Por outro lado, $d\neq 0$ pois, pelo lema 3, $\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ c & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = -\frac{cd}{4} \neq 0$. Neste caso,

$$\Gamma\colon y^2 = -\frac{d}{c}\left(x-\frac{e}{d}\right)\ ,$$

que é equação de parábola com diretriz vertical, pelo exercício 15. □

Corolário 3. *Seja* $\Gamma\colon ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0$*. Então* Γ *descreve parábola, retas paralelas (coincidentes ou não) ou o conjunto vazio.*

Demonstração. Consequência imediata do teorema anterior e do teorema 5. □

É interessante notar que, nas condições do corolário anterior, $ax^2+bxy+cy^2$ é múltiplo de um quadrado perfeito por causa do exercício 4. Pelo teorema anterior, esse quadrado perfeito já determina a primeira coluna de uma rotação que elimina o termo misto.

Exemplo 3. *A cônica* $\Gamma\colon 9x^2-24xy+16y^2-30x-85y+175=0$ *é uma parábola pois*

$$\begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 9\cdot 16-144 = 0 \qquad e \qquad \begin{vmatrix} 9 & -12 & -15 \\ -12 & 16 & -\frac{85}{2} \\ -15 & -\frac{85}{2} & 175 \end{vmatrix} = -\tfrac{140625}{4}\ .$$

Ainda assim, essa informação prévia não nos ajuda a encontrar elementos importantes na parábola tais como foco, diretriz e vértice. Já o fato que $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$ *nos induz a usar a rotação* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *para eliminar o termo misto. De fato,*

$$3x - 4y = 3\left(\tfrac{3u+4v}{5}\right) - 4\left(\tfrac{-4u+3v}{5}\right) = \tfrac{25u}{5} = 5u \quad e$$
$$-30x - 85y = -30\left(\tfrac{3u+4v}{5}\right) - 85\left(\tfrac{-4u+3v}{5}\right) = 50u - 75v \ .$$

Portanto, no sistema (u, v), $\Gamma\colon 25u^2 + 50u - 75v + 175 = 0$. *Dado que*

$$25u^2 + 50u - 75v + 175 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 3v + 7 = 0 \Leftrightarrow (u+1)^2 = 3(v-2) \ ,$$

temos que Γ *é parábola de vértice* $V = (-1, 2)$ *e foco* $F = \left(-1, \frac{11}{4}\right)$ *(no sistema* (u, v)*), pois* $p = \frac{3}{4}$. *Por sua vez, a diretriz é* $r\colon v = \frac{5}{4}$. *No sistema original (o sistema* (x, y)*),* $V = (1, 2)$ *e* $F = \left(\frac{8}{5}, \frac{49}{5}\right)$. *Já que* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *concluímos que* $r\colon 16x + 12y = 25$.

Exercício 18. *Identifique as cônicas de equações e, no caso das parábolas, explicite o foco e a diretriz:*

(1) $y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0$
(2) $3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$
(3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$
(4) $7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$
(5) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
(6) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$

Exercício 19. *Mostre que toda parábola é um conjunto ilimitado e infinito.*

Exercício 20. *Uma parábola* Γ *tem vértice* $V = (1, 1)$ *e foco* $F = (0, 2)$. *Determine sua diretriz e equação para* Γ.

5. Retas e Parábolas

Proposição 17. *A reta focal de uma parábola é eixo de simetria dela.*

Demonstração. Seja $\Gamma\colon y = ax^2$ (onde $a \neq 0$) uma parábola. Neste caso a reta focal é a reta $x = 0$.

Tomemos um ponto $X = (x, y) \in \Gamma$. Se Y é o simétrico de X com relação à reta $x = 0$, então $Y = (-x, y)$. Como $a(-x)^2 = ax^2 = y$, concluímos que $Y \in \Gamma$. □

Proposição 18. *Toda reta paralela à reta focal de uma parábola a encontra uma única vez.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y = ax^2$, para $a \neq 0$, e seja $s\colon x = k$. Daí, $s \cap \Gamma = \left\{(k, ak^2)\right\}$. □

Definição 2. *Seja* Γ *uma parábola. Se* $P, Q \in \Gamma$ *são distintos, dizemos que* $\overline{PQ}$ *é uma* ***corda de*** Γ. *Se uma corda de* Γ *passa pelo seu foco, então dizemos que ela é uma* ***corda focal****.*

Exercício 21. *Determine o comprimento da corda focal da parábola* $x^2 + 8y = 0$ *que é paralela à reta* $r\colon 3x + 4y - 7 = 0$.

Exercício 22. *Se* $F = \left(2, \frac{5}{2}\right)$ *e* $V = (2, 1)$ *são o* ***foco*** *e o* ***vértice*** *de uma parábola* Γ. *Determine equação geral da reta diretriz de* Γ*, equação para* Γ *e o ponto de* Γ *alinhado com o foco e* $(8, 7)$.

Proposição 19. *Toda parábola admite uma corda focal de comprimento mínimo e esta é paralela à sua diretriz.*

Demonstração. Seja $\Gamma\colon 4py = x^2$, para $p \neq 0$. O foco de Γ é $F = (0, p)$ e sua diretriz é $y + p = 0$.

Sejam $P = \left(x_1, \frac{x_1^2}{4p}\right)$ e $Q = \left(x_2, \frac{x_2^2}{4p}\right)$, pontos distintos de Γ. Portanto $x_1 \neq x_2$. Observamos que P, Q e F estão alinhados se, e somente se,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ p & \frac{x_1^2}{4p} & \frac{x_2^2}{4p} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4p} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 4p^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4p} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 - 4p^2 & x_2^2 - 4p^2 \end{vmatrix} = \tfrac{x_1\left(x_2^2 - 4p^2\right) - x_2\left(x_1^2 - 4p^2\right)}{4p} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_2 - x_1) + 4p^2(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = -4p^2 \ .$$

O tamanho dessa corda focal é $\left|\frac{x_1^2}{4p}+p\right|+\left|\frac{x_2^2}{4p}+p\right| = \frac{x_1^2+x_2^2+8p^2}{|4p|}$, onde $x_1x_2=-4p^2$. Neste caso

$$x_1^2+x_2^2+8p^2 = x_1^2+\left(\frac{-4p^2}{x_1}\right)^2+8p^2 = x_1^2+\frac{16p^4}{x_1^2}+8p^2 = \left(x_1-\frac{4p^2}{x_1}\right)^2+16p^2,$$

que atinge valor mínimo quando $x_1^2=4p^2$.

Portanto a corda focal de comprimento mínimo tem extremos $(2p,p)$ e $(-2p,p)$ e, consequentemente, é horizontal. Seu comprimento é $4|p|$, ou seja, **o dobro da distância do foco à diretriz**. □

Definição 3. *O **latus rectum** de uma parábola é a corda focal que tem comprimento mínimo.*

Exercício 23. *Determine os extremos do **latus rectum** da parábola de equação* $\Gamma\colon x^2-2xy+y^2-8x-8y+16=0$.

Exercício 24. *Determine os extremos da corda focal da parábola* $\Gamma\colon x^2+2xy+y^2-8\sqrt{2}x+8\sqrt{2}y=0$, *que é paralela à reta* $r\colon x=7y$.

Exercício 25. *Determine uma equação da parábola* Γ *que tem reta focal é o eixo das ordenadas e o ponto* $L=(2,2)$ *é uma das extremidades do **latus rectum**.*

Proposição 20. *Seja* Γ *uma parábola. Se* $\overline{A_1A_2}$ *e* $\overline{B_1B_2}$ *são cordas de* Γ, *paralelas e distintas, então a reta determinada pelos seus pontos médios é paralela à reta focal de* Γ.

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y=ax^2$, para $a\neq 0$, e neste sistema a reta focal é vertical.

Sejam $A_1=(b,ab^2)$, $A_2=(c,ac^2)$, $B_1=(d,ad^2)$ e $B_2=(e,ae^2)$. Logo $\overrightarrow{A_1A_2}=(c-b,a(c^2-b^2))=(c-b)(1,a(c+b))$ e $\overrightarrow{B_1B_2}=(e-d)(1,a(e+d))$. Sabemos que $b\neq c$ e $d\neq e$. Se $\overline{A_1A_2}//\overline{B_1B_2}$, então $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{c-b}//\frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{e-d}$ e que $c+b=e+d$.

Sejam M_1 e M_2 os pontos médios de $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, respectivamente. Daí $M_1=\left(\frac{b+c}{2},\frac{a(b^2+c^2)}{2}\right)$ e $M_2=\left(\frac{d+e}{2},\frac{a(d^2+e^2)}{2}\right)$. Já que $c+b=e+d$, concluímos que $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ é vertical. □

Tomemos a parábola $\Gamma\colon y=ax^2$, para $a\neq 0$, e fixemos um ponto $X_0\in\Gamma$. Logo $X_0=(x_0,y_0)$ com $y_0=ax_0^2$. Fixemos também um vetor $\vec{v}=(\alpha,\beta)$ não paralelo à reta focal. Sendo assim $\alpha\neq 0$. Seja r a reta que passa por X_0 e é paralela a $\vec{v}$. Observamos que, para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$X_0+\lambda\vec{v}\in\Gamma \quad\Leftrightarrow\quad ax_0^2+\lambda\beta = y_0+\lambda\beta = a(x_0+\lambda\alpha)^2 = ax_0^2+2ax_0\alpha\lambda+a\alpha^2\lambda^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\lambda\Big(a\alpha^2\lambda+2ax_0\alpha-\beta\Big)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=0 \quad\text{ou}\quad \lambda=\tfrac{\beta-2ax_0\alpha}{a\alpha^2}\ .$$

A solução $\lambda=0$ corresponde ao ponto X_0, que é elemento de $\Gamma\cap r$. Se $\beta-2ax_0\alpha\neq 0$, então $r\cap\Gamma$ tem exatemente dois elementos. Caso $\beta=2ax_0\alpha$, deduzimos que $r\cap\Gamma=\{X_0\}$.

A condição $\beta=2ax_0\alpha$ é equivalente a $\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 2ax_0\end{vmatrix}=0$, ou ainda, a $\vec{v}//(1,2ax_0)$.

Proposição 21. ***Não** existem três pontos colineares em uma parábola.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y=ax^2$, onde $a\neq 0$, e r uma reta. Suponhamos $r\cap\Gamma\neq\emptyset$ e seja $X_0\in r\cap\Gamma$. Pela discussão feita acima, $r\cap\Gamma$ tem no máximo dois elementos. Logo não há três pontos distintos de Γ que estejam alinhados. □

Corolário 4. *A reta focal é o **único** eixo de simetria de uma parábola.*

Demonstração. Seja Γ uma parábola e suponha que r é um eixo de simetria para Γ. Para cada ponto X, seja X' o simétrico de X com relação à reta r. Pela proposição 21, deduzimos que $r\cap\Gamma$ tem no máximo dois elementos. Pelo exercício 19, podemo fixar $P\in\Gamma\setminus r=\Gamma\setminus(r\cap\Gamma)$. Caso $P=P'$, teríamos $P\in r$, o que não acontece. Logo P e P' são distintos e determinam corda de Γ. Fixemos $Q\in\Gamma\setminus(r\cup\{P,P'\})$. Analogamente, Q e Q' são distintos e também determinam corda de Γ. Se $Q'=P'$ ou $Q'=P$, então $Q=P$ ou $Q=P'$, algo que não acontece. Portanto $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são cordas distintas. Como ambas são perpendiculares a r, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são segmentos paralelos. Pela proposição 20, seus pontos médios determinam reta paralela à reta focal. Como estes pontos médios estão em r, r é paralela à reta focal.

Seja $\Gamma\colon y = ax^2$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Logo $r\colon x = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $X = (x, y)$, então $X' = (2c - x, y)$. Uma vez que $(0, 0) \in \Gamma$, deduzimos que $(2c, 0) \in \Gamma$. Consequentemente $c = 0$ e $r\colon x = 0$, que é a reta focal de Γ. □

Teorema 22. *Sejam Γ uma parábola e $X_0 \in \Gamma$. Existe uma única reta t tal que $t \cap \Gamma = \{X_0\}$ e t* ***não é paralela*** *à reta focal de Γ.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma\colon y = ax^2$, onde $a \neq 0$. Daí $X_0 = (x_0, y_0)$ com $y_0 = ax_0^2$. Pela discussão feita acima a reta $t : X = X_0 + \lambda(1, 2ax_0)$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$) não é paralela à reta focal de Γ e tem interseção unitária com Γ. Também pela mesma discussão é a única reta satisfazendo essas condições. □

Definição 4. *Sejam Γ uma parábola e $X_0 \in \Gamma$. A* ***reta tangente a*** *Γ* ***no ponto*** *X_0 é a reta que passa por X_0, tem interseção unitária com Γ e não é paralela à reta focal. A* ***reta normal a*** *Γ* ***no ponto*** *X_0 é a reta que passa por X_0 e é perpendicular à reta tangente no mesmo ponto X_0.*

Pela discussão feita acima, a reta tangente encontra Γ somente no ponto X_0 e para cada ponto de Γ somente duas retas têm essa propriedade: a reta tangente e aquela paralela à reta focal.

Corolário 5. *Se $\Gamma\colon y = ax^2$, onde $a \neq 0$, então $2ax_0x - y = ax_0^2$ é equação para a reta tangente a Γ no ponto (x_0, ax_0^2).*

Demonstração. Observamos a demonstração do teorema anterior, a reta tangente a Γ no ponto (x_0, ax_0^2) é paralela ao vetor $(1, 2ax_0)$. Dado que

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - ax_0^2 & 2ax_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2ax_0(x - x_0) - (y - ax_0^2) = 0 \Leftrightarrow 2ax_0x - y = ax_0^2 \Leftrightarrow \frac{y + ax_0^2}{2} = ax_0x \ ,$$

a reta tangente tem equação $2ax_0x - y = ax_0^2$ ou $\frac{y+ax_0^2}{2} = ax_0x$. □

Exercício 26. *Se $\Gamma\colon x = ay^2$, onde $a \neq 0$, mostre que a reta tangente a Γ no ponto $(2ay_0^2, y_0)$ tem equação $2ay_0y - x = ay_0^2$.*

Exercício 27. *Determine as retas tangente e normal à parábola Γ no ponto P para os casos:*

(1) $\Gamma\colon x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ *e* $P = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$
(2) $\Gamma\colon x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$ *e* $P = \left(3, -\frac{9}{5}\right)$
(3) $\Gamma\colon y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$ *e* $P = (-3, -2)$
(4) $\Gamma\colon 4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ *e* $P = (0, 0)$
(5) $\Gamma\colon x^2 - 8xy + 16y^2 - 4x + 10y + 4 = 0$ *e* $P = \left(\frac{13}{8}, \frac{3}{32}\right)$
(6) $\Gamma\colon y = 4x - x^2$ *e* $P = (4, 0)$

Exercício 28. *Determine o que se pede nos casos:*

(1) a reta tangente a $\Gamma\colon x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ *que é paralela a* $r\colon 3x + 4y = 0$
(2) a reta tangente a $\Gamma\colon x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$ *que é paralela* $r\colon x + y = 0$
(3) a reta normal a $\Gamma\colon y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$ *que é paralela a* $r\colon y + x = 5$
(4) a reta tangente a $\Gamma\colon 4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ *que é ortogonal ao eixo x*
(5) a reta normal a $\Gamma\colon y^2 - 8xy + 16x^2 - 4x + 10y + 4 = 0$ *é ortogonal a* $r\colon x = \frac{1}{48}$

Exercício 29. *Determine as retas tangente à parábola* $\Gamma\colon x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = 0$, *que passam pelo ponto* $P = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Proposição 23. *Sejam Γ uma parábola, $X_0 \in \Gamma$, $\vec{t_0}$ e $\vec{n_0}$ vetores diretores das retas tangente e normal à Γ em X_0, respectivamente. Se H_0 é o ponto da diretriz mais próximo de X_0, então* $\text{ang}(\overrightarrow{X_0H_0}, \vec{t_0}) = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \vec{t_0})$. *Ainda,* $\text{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \vec{n_0}) = \text{ang}(\overrightarrow{VF}, \vec{n_0})$, *onde F é o foco de Γ.*

Demonstração. Podemos supor $\Gamma\colon y = ax^2$, para $a \neq 0$. Sendo assim, $\overrightarrow{VF} = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$, $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é $r\colon y + \frac{1}{4a} = 0$. Sejam $\vec{u_0} = (1, 2ax_0)$ e $\vec{v_0} = \vec{u_0}^{\perp} = (-2ax_0, 1)$. Dadas as condições, deduzimos que $\vec{t_0} = \lambda\vec{u_0}$ e $\vec{n_0} = \mu\vec{v_0}$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, não nulos.

Sejam $\theta_1 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0H_0}, \vec{t_0})$ e $\theta_2 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \vec{t_0})$. Já que $\overrightarrow{X_0F} = \left(-x_0, \frac{1}{4a} - ax_0{}^2\right)$,

$$\vec{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0F} = (1, 2ax_0) \bullet \left(-x_0, \frac{1}{4a} - ax_0{}^2\right) = -x_0 + \frac{2ax_0}{4a} - 2a^2x_0{}^3 = -\frac{x_0}{2} - 2a^2x_0{}^3 = -\frac{x_0(1 + 4a^2x_0^2)}{2} \ .$$

Visto que H_0 é o ponto de r mais próximo de X_0, então $H_0 = \left(x_0, -\frac{1}{4a}\right)$, $\overrightarrow{X_0H_0} = \left(0, -\frac{1}{4a} - a{x_0}^2\right)$ e

$$\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0H_0} = (1, 2ax_0) \bullet \left(0, -\frac{1}{4a} - a{x_0}^2\right) = -\frac{2ax_0}{4a} - 2a^2{x_0}^3 = -\frac{x_0}{2} - 2a^2{x_0}^3 = \overrightarrow{t_0} \bullet \overrightarrow{X_0F} \ .$$

Uma vez que $\|\overrightarrow{X_0F}\| = d(X_0, F) = d(X_0, r) = \|\overrightarrow{X_0H_0}\|$, concluímos que $\theta_1 = \theta_2$ pois

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{t_0} \bullet \overrightarrow{X_0H_0}}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0H_0}\|} = \frac{\lambda(\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0H_0})}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0H_0}\|} = \frac{\lambda(\overrightarrow{u_0} \bullet \overrightarrow{X_0F})}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0F}\|} = \frac{\overrightarrow{t_0} \bullet \overrightarrow{X_0F}}{\|\overrightarrow{t_0}\| \cdot \|\overrightarrow{X_0F}\|} = \cos\theta_2 \ .$$

Agora sejam $\alpha_1 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F}, \overrightarrow{n_0})$ e $\alpha_2 = \text{ang}(\overrightarrow{VF}, \overrightarrow{n_0})$. Dado que

$$\overrightarrow{X_0F} \bullet \overrightarrow{v_0} = 2ax_0^2 + \tfrac{1}{4a} - ax_0^2 = \tfrac{1}{4a} + ax_0^2 = \tfrac{1+4a^2x_0^2}{4a} = \tfrac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4a} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{X_0F}\| = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\tfrac{1}{4a} - a{x_0}^2\right)^2} =$$
$$= \sqrt{x_0^2 + \tfrac{1}{16a^2} - \tfrac{{x_0}^2}{2} + a^2x_0^4} = \sqrt{\tfrac{1}{16a^2} + \tfrac{{x_0}^2}{2} + a^2x_0^4} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4a} + ax_0^2\right)^2} = \left|\tfrac{1}{4a} + ax_0^2\right| = \tfrac{1+4a^2x_0^2}{4|a|} = \tfrac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4|a|},$$

deduzimos que

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overrightarrow{X_0F} \bullet \overrightarrow{n_0}}{\|\overrightarrow{X_0F}\| \cdot \|\overrightarrow{n_0}\|} = \frac{\mu(\overrightarrow{X_0F} \bullet \overrightarrow{v_0})}{\|\overrightarrow{X_0F}\| \cdot |\mu| \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{\mu}{|\mu|} \cdot \frac{\frac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4a}}{\|\overrightarrow{v_0}\| \cdot \frac{\|\overrightarrow{v_0}\|^2}{4|a|}} = \frac{|\mu a|}{\mu a\|\overrightarrow{v_0}\|} \ .$$

Por outro lado,

$$\cos\alpha_2 = \frac{\overrightarrow{VF} \bullet \overrightarrow{n_0}}{\|\overrightarrow{VF}\| \cdot \|\overrightarrow{n_0}\|} = \frac{\mu(\overrightarrow{VF} \bullet \overrightarrow{v_0})}{\|\overrightarrow{VF}\| \cdot |\mu| \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{\mu}{|\mu|} \cdot \frac{\frac{1}{4a}}{\frac{1}{4|a|} \cdot \|\overrightarrow{v_0}\|} = \frac{|\mu a|}{\mu a\|\overrightarrow{v_0}\|} = \cos\alpha_1$$

e, consequentemente, $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Os resultados da proposição anterior mostram dois fatos interessantes:

(1) para construir a reta tangente à parabola Γ em um certo ponto X_0, basta achar H_0, que é o ponto da diretriz mais próximo de X_0, e a bissetriz entre as retas $\overleftrightarrow{X_0F}$ e $\overleftrightarrow{X_0H_0}$ que deixa Γ toda de um lado só.
(2) se um raio de luz é emitido do foco, ele se refletirá paralelo à reta focal. Propriedade usada, por exemplo, nas antenas parabólicas

6. Elipses

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos e uma constante $a > \frac{d(F_1,F_2)}{2}$. A **elipse de focos F_1 e F_2 e parâmetro** a é a curva determinada pelos pontos cuja soma das distâncias aos focos é $2a$. Se $\mathbb{E}$ é a elipse determinada por F_1, F_2 e a, então, para o ponto X,

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a \ .$$

Seja C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Suponhamos que $X \in \mathbb{E}$ e seja Y o simétrico de X com relação a C. Sendo assim, $\overrightarrow{YC} = \overrightarrow{CX}$,

$$\overrightarrow{YF_2} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_2} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_1C} = \overrightarrow{F_1X} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{YF_1} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_1} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_2C} = \overrightarrow{F_2X}.$$

Portanto

$$d(Y, F_1) + d(Y, F_2) = d(X, F_2) + d(X, F_1) = 2a \ .$$

Ou seja, $Y \in \mathbb{E}$.

Definição 5. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado de **segmento focal de** $\mathbb{E}$, enquanto a **reta focal de** $\mathbb{E}$ é a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$. O ponto médio do segmento focal é chamado de **centro de** $\mathbb{E}$. A **distância focal** é o número $d(F_1, F_2)$. Se $X \in \mathbb{E}$, os **raios focais de** X são as distâncias de X aos focos de $\mathbb{E}$.*

Provamos acima que a elipse é **simétrica** com relação ao seu centro.

Fixemos um sistema de coordenadas no qual a reta focal seja horizontal. Portanto $C = (h, k)$. Dado que $\overrightarrow{CF_1} = -\overrightarrow{CF_2}$, que são ambos paralelos a $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, podemos fixar $\overrightarrow{CF_2} = (c, 0)$, com $c > 0$. Daí $F_2 = C + \overrightarrow{CF_2} = (h + c, k)$ e $F_1 = C - \overrightarrow{CF_2} = (h - c, k)$. Visto que $d(F_1, F_2) = 2c$, induzimos que $a > c$. Se $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, então $a > b > 0$ e $a^2 = b^2 + c^2$. Os números a, b e c são chamados de **parâmetros geométricos** da elipse.

Procuremos agora uma equação para a elipse $\mathbb{E}$ nas condições acima. Para $X = (x, y)$, sejam $u = x - h$ e $v = y - k$. Logo

$$\begin{aligned} X \in \mathbb{E} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(u+c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(u-c)^2+(y-k)^2} = 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)+2cu}+\sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)-2cu} = 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\left(u^2+c^2+v^2\right)+2\sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)^2-4c^2u^2} = 4a^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)^2-4c^2u^2} = 2a^2-\left(u^2+c^2+v^2\right) \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \left(u^2+c^2+v^2\right)^2-4c^2u^2 = \left(2a^2-\left(u^2+c^2+v^2\right)\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4c^2u^2 = 4a^4-4a^2\left(u^2+c^2+v^2\right) \quad &\Leftrightarrow \quad a^2\left(u^2+c^2+v^2\right)-c^2u^2 = a^4 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)u^2+a^2v^2 = a^4-a^2c^2 = a^2(a^2-c^2)b^2u^2+a^2v^2 = a^2b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{u^2}{a^2}+\tfrac{v^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{(x-h)^2}{a^2}+\tfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1\ . \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que, se $X \in \mathbb{E}$, então $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A proposição a seguir vai mostrar a recíproca, o que finaliza a procura por alguma equação da elipse $\mathbb{E}$.

Proposição 24. *Nas mesmas condições da discussão feita até este instante, se $X = (x, y)$ é um ponto do plano que satisfaz a equação $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, então $d(X, F_1) = a+\frac{c(x-h)}{a}$, $d(X, F_2) = a-\frac{c(x-h)}{a}$ e X pertence à elipse $\mathbb{E}$.*

Demonstração. Fixemos $X = (x, y)$ nas condições da hipótese. Daí $(y-k)^2 = b^2-\frac{b^2(x-h)^2}{a^2}$ e

$$\begin{aligned} \left(d(X,F_1)\right)^2 &= (x-h+c)^2+(y-k)^2 = (x-h)^2+2c(x-h)+c^2+b^2-\tfrac{b^2(x-h)^2}{a^2} = \\ &= (x-h)^2\left(1-\tfrac{b^2}{a^2}\right)+2c(x-h)+a^2 = \tfrac{c^2(x-h)^2}{a^2}+2c(x-h)+a^2 = \left(\tfrac{c(x-h)}{a}+a\right)^2 . \end{aligned}$$

Ou seja, $d(X, F_1) = \left|\frac{c(x-h)}{a}+a\right|$. Analogamente, induzimos que $d(X, F_2) = \left|\frac{c(x-h)}{a}-a\right|$. Como $\frac{(x-h)^2}{a^2} \leq 1$, deduzimos que que $(x-h)^2 \leq a^2$ e $|x-h| \leq a$. Daí $\frac{c|x-h|}{a} \leq c < a$, ou seja, $-a < \frac{c(x-h)}{a} < a$. Portanto $\frac{c(x-h)}{a}+a > 0$ e $\frac{c(x-h)}{a}-a < 0$. Logo

$$d(X, F_1) = a+\tfrac{c(x-h)}{a} \quad \text{e} \quad d(X, F_2) = a-\tfrac{c(x-h)}{a}.$$

Ainda, $d(X, F_1)+d(X, F_2) = 2a$ e $X \in \mathbb{E}$. □

Portanto fica demonstrado o teorema:

Teorema 25. *Sejam $a, c \in \mathbb{R}$ tais que $a > c > 0$ e $b = \sqrt{a^2-c^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h-c, k)$ e $F_2 = (h+c, k)$, seja $\mathbb{E}$ a elipse de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para o ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\ .$$ □

Corolário 6. *Sejam $a, c \in \mathbb{R}$ tais que $a > c > 0$ e $b = \sqrt{a^2-c^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h, k-c)$ e $F_2 = (h, k+c)$, seja $\mathbb{E}$ a elipse de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1\ .$$

Demonstração. Primeiro tomemos a translação $\begin{cases} x = u+h \\ y = v+k \end{cases}$. Logo $C = (0, 0)$, $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, no sistema (u, v). Rotacionemos os eixos de (u, v) por $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$. Daí $C = (0, 0)$, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ no sistema (t, w). Pelo teorema anterior:

$$X = (t, w) \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{a^2}+\frac{w^2}{b^2} = 1\ .$$

Uma vez que $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, deduzimos que $\mathbb{E}\colon \frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1$. Finalmente, no sistema (x, y):

$$X = (x, y) \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \ .$$

□

Uma consequência imediata destes dois últimos resultados é que toda elipse com reta focal paralela a um dos eixos coordenados admite **equação de 2º.grau sem termo misto**.

Exercício 30. *Um ponto $P = (x, y)$ se desloca no plano de modo que a soma das distâncias aos pontos $A = (3, 1)$ e $B = (-5, 1)$ é 10. Diga qual curva é descrita por P e em seguida determina equação para essa curva.*

Exercício 31. *Determine os raios focais do ponto $P = \left(3, \frac{7}{4}\right)$ sobre a elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.*

Exercício 32. *Um segmento AB de medida 12, desloca-se de modo que A percorre o eixo das abscissas e B o das ordenadas. O ponto $P = (x, y)$ é interior ao segmento AB e fica situado a 8 de A. Estabeleça equação do lugar geométrico descrito pelo ponto P.*

Se C é um ponto e $r > 0$, lembramos que a **circunferência de centro C e raio r** é o conjunto dos pontos do plano que distam r de C. Se $\mathbf{C}$ for a circunferência determinada por C e r, então, para o ponto X,

$$X \in \mathbf{C} \Leftrightarrow d(X, C) = r \ .$$

Teorema 26. *Sejam $h, k, r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. Dado o ponto $C = (h, k)$, seja $\mathbf{C}$ a circunferência de centro C e raio r. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbf{C} \quad \Leftrightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \ .$$

Demonstração. É imediato da fórmula de distância. □

Portanto, em qualquer sistema de coordenadas, toda circunferência tem equação de 2º.grau que **não tem** misto e cujos termos de 2º.grau têm mesmo coeficiente.

Observação 1. *É interessante também notar que toda circunferência pode ser considerada uma elipse, quando se permite tomar $F_1 = F_2$, ou seja, para $c = 0$.*

Exercício 33. *Suponha $A \neq 0$. Determine condições para que $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ seja equação de uma circunferência.*

Exercício 34. *Sejam $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, distintos. Determine equação para os pontos X do plano que satisfazem $\overrightarrow{XA} \perp \overrightarrow{XB}$. Que curva é essa?*

Teorema 27. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de centro C e parâmetros geométricos a, b e c. Para todo $X \in \mathbb{E}$, $b \leq d(X, C) \leq a$.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0, 0)$ e $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tomemos $X = (x, y) \in \mathbb{E}$. Como $\frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2}$,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 + y^2}{b^2} \ .$$

Portanto $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ e, consequentemente, $b \leq d(X, C) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$. □

Imediatamente, concluímos que toda elipse é um **conjunto limitado**.

Exercício 35. *Mostre toda elipse e toda circunferência é conjunto infinito.*

Corolário 7. *Consideremos as mesmas condições do teorema anterior.*

(1) Existem $A_1, A_2 \in \mathbb{E}$, simétricos com relação a C, tal que, para $X \in \mathbb{E}$, $d(X, C) = a$ se, e somente se, $X = A_1$ ou $X = A_2$. Ademais, A_1 e A_2 estão na reta focal.

(2) Existem $B_1, B_2 \in \mathbb{E}$, simétricos com relação a C, tal que, para $X \in \mathbb{E}$, $d(X, C) = b$ se, e somente se, $X = B_1$ ou $X = B_2$. Além disto, o quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$ é um losando com lados medindo a.

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0, 0)$, os focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$; e $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
(1) Sejam $A_2 = (a, 0)$ e $A_1 = (-a, 0)$. Logo deduzimos que C é ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ e que os dois pontos estão na reta focal, que é a reta $y = 0$. Também é imediato que A_1 e A_2 são pontos de $\mathbb{E}$ e que $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a$. Suponhamos $X = (x, y) \in \mathbb{E}$ tal que $d(X, C) = a$. Logo

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Sendo asssim, $\frac{y^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ e $y = 0$. Consequentemente, $x = a$ ou $x = -a$.
(2) Sejam $B_2 = (0, b)$ e $B_1 = (0, -b)$. Imediatamente deduzimos que $B_1, B_2 \in \mathbb{E}$, que C é ponto médio do segmento $\overline{B_1B_2}$ e que $d(B_1, C) = d(B_2, C) = b$. Ainda $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2) = \sqrt{c^2 + b^2} = a$ e o quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$ é um losango. Suponhamos $X = (x, y) \in \mathbb{E}$ tal que $d(X, C) = b$. Logo

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{b^2} \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Sendo asssim, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2}$ e $x = 0$. Consequentemente, $y = b$ ou $y = -b$. □

Definição 6. *Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 do corolário anterior são chamados de **vértices da elipse**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de **eixo maior da elipse** . O segmento $\overline{B_1B_2}$ é chamado de **eixo menor da elipse**.*

Imediatamente deduzimos que os quatro vértices de uma elipse determinam um losango. Ainda, os triângulos $\triangle F_1CB_1$, $\triangle F_2CB_1$, $\triangle F_2CB_2$ e $\triangle F_1CB_2$ são todos retângulos no vértice C com seus catetos medindo c e b, enquanto suas hipotenusas medem a.

Exercício 36. *Seja $PQRS$ um losango. Qual condição $PQRS$ deve satisfazer para que P, Q, R e S sejam vértices de uma elipse? Como construir essa elipse?*

Exercício 37. *Determine fórmula para as distâncias dos vértices do eixo maior de uma elipse aos seus focos.*

Exercício 38. *Determinar os focos, o centro, os vértices e os parâmetros de cada uma das **elipses**:*
(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
(2) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
(3) $4x^2 + y^2 = 1$
(4) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
(5) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$
(6) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

Exercício 39. *Mostre que as retas suportes dos eixos maior e menor são eixos de simetria para uma elipse.*

Teorema 28. *Elipses e circunferências admitem equação $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$, onde $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} > 0$ e $(\alpha + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{C}$ uma circunferência de centro $C = (h, k)$ e raio r. Pelo teorema 26,

$$\mathbf{C}\colon x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \ .$$

De fato, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, enquanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ -h & -k & h^2 + k^2 - r^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & -k & -r^2 \end{vmatrix} = -r^2 \ .$$

Seja $\mathbb{E}$ um elipse de centro $C = (h, k)$ e parâmetros a, b e c. Aplicando a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$, obtemos que $C = (0, 0)$, no sistema (u, v). Usemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que deixa a reta focal horizontal. Pelo teorema 25, $\mathbb{E}\colon \frac{t^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} - 1 = 0$, no sistema (t, w). Mas

$$\frac{t^2}{a^2}+\frac{w^2}{b^2}=\begin{pmatrix}t & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

Por outro lado, $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{pmatrix}$, para $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, dado que é matriz simétrica. Logo, no sistema (u,v), $\mathbb{E}$: $\alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2-1=0$. Pela proposição 7, deduzimos que as matrizes $\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}$ têm mesmos traço e determinante. Sendo assim, $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2}>0$ e $\alpha+\beta=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>0$.

No sistema original, $\mathbb{E}$: $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$, e, pela proposição 2,

$$\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{a^2b^2},$$

o qual conclui a tese do teorema. □

Agora vejamos uma recíproca para o teorema anterior.

Teorema 29. *Seja* Γ: $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}>0$ *e* $(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}<0$. *Então* Γ *descreve uma elipse ou uma circunferência.*

Demonstração. Dado que $\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0$, existem únicos $h,k\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Logo a translação $\begin{cases}x=u+h\\ y=v+k\end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1º.grau. Por conseguinte, no sistema (u,v), Γ: $\alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2+f'=0$, para algum $f'\in\mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$0>(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & f'\end{vmatrix}=(\alpha+\gamma)\left(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)f'.$$

Portanto $f'(\alpha+\gamma)<0$.

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ w\end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t,w), Γ: $\delta t^2+\epsilon w^2+f'=0$, para $\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$, satisfazendo $\delta+\epsilon=\alpha+\gamma$ e $\delta\epsilon=\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7. Consequentemente, $\delta\epsilon>0$ e $f'(\delta+\epsilon)<0$.

Se $\delta>0$, então $\epsilon>0$, $\delta+\epsilon>0$ e $f'<0$. Caso $\delta<0$, deduzimos que $\epsilon<0$, $\delta+\epsilon<0$ e $f'>0$. Em qualquer das situações, $\delta f'<0$ e $\epsilon f'<0$. Sejam $\lambda=\sqrt{-\frac{f'}{\delta}}$ e $\mu=\sqrt{-\frac{f'}{\epsilon}}$. Observamos que

$$\delta t^2+\epsilon w^2+f'=0\Leftrightarrow-\frac{f't^2}{\lambda^2}-\frac{f'w^2}{\mu^2}+f'=0\Leftrightarrow\frac{t^2}{\lambda^2}+\frac{w^2}{\mu^2}=1.$$

Portanto Γ: $\frac{t^2}{\lambda^2}+\frac{w^2}{\mu^2}=1$, que corresponde a equação de elipse ou de circunferência. □

Teorema 30. *Seja* Γ: $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}>0$.

(1) Se $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$, *então* Γ *descreve um ponto.*

(2) Se $(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, *então* Γ *corresponde ao conjunto vazio.*

Demonstração. Em qualquer dos casos, conclui-se que $(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$. Como $\alpha\gamma > \frac{b^2}{4}$, deduzimos que α e γ são ambos não nulos e têm mesmo sinal. Consequentemente, $\alpha+\gamma \neq 0$. Dado que $\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4} \neq 0$, existem únicos $h, k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Logo a translação $\begin{cases} x = u+h \\ y = v+k \end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1º.grau. Por conseguinte, no sistema (u,v), $\Gamma\colon \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + f' = 0$, para algum $f' \in \mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = (\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{vmatrix} = (\alpha+\gamma)\left(\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)f' .$$

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t,w), $\Gamma\colon \delta t^2 + \epsilon w^2 + f' = 0$, para $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, satisfazendo $\delta+\epsilon = \alpha+\gamma$ e $\delta\epsilon = \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7.

(1) Se $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$, então $f' = 0$. Dado que $\delta\epsilon > 0$, observamos que $\delta t^2 + \epsilon w^2 = 0$ se, e somente se, $t = w = 0$. Neste caso, Γ representa o conjunto unitário $\{(0,0)\}$, no sistema (t,w), ou seja, o $\{(h,k)\}$, no sistema (x,y).

(2) Se $(\alpha+\gamma)\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, então $(\alpha+\gamma)f' > 0$ e $(\delta+\epsilon)f' > 0$. Neste caso, δ, ϵ e f' são todos não nulos e têm mesmo sinal. Portanto não há ponto (t,w) que satisfaça $\delta t^2 + \epsilon w^2 + f' = 0$. Neste caso, Γ corresponde ao conjunto vazio. □

Observação 2. *Nas condições dos teoremas, se a cônica não for vazia, a translação que elimina os termos de 1º.grau, determina o centro de elipse ou da circunferência, ou ainda o único ponto que satisfaz a equação de* Γ.

Exemplo 4. *A demonstração do teorema 29 nos deu um roteiro de como determinar qual cônica a equação ela representa: efetuar um translação e depois uma rotação!*

Tomemos, por exemplo, $\Gamma\colon 4x^2-4xy+7y^2+12x+6y-9=0$. *O sistema linear* $\begin{cases} 4h-2k+6=0 \\ -2h+7k+3=0 \end{cases}$ *tem solução única* $(h,k)=(-2,-1)$. *Depois da translação* $\begin{cases} x = u-2 \\ y = v-1 \end{cases}$, *obtemos* $\Gamma\colon 4u^2-4uv+7v^2-24=0$ *(verificar!).*

Para a rotação, estudemos as raízes de $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 24$, *que são 3 e 8. O sistema* $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$, *tem soluções* $(\alpha,\beta)//(2,1)$. *Depois da rotação* $\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}t \\ w\end{pmatrix}$, *chegamos a* $\Gamma\colon 3t^2 + 8w^2 = 24$, *ou equivalentemente,*

$$\Gamma\colon \frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1\ ,$$

que é uma ***elipse de reta focal horizontal*** *com parâmetros* $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ *e* $c = \sqrt{5}$. *A seguir colocamos as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices nos diferentes sistemas:*

	(t,w)	(u,v)	(x,y)
Centro	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-2,-1)$
Foco	$\left(-\sqrt{5},0\right)$	$(-2,-1)$	$(-4,-2)$
Foco	$\left(\sqrt{5},0\right)$	$(2,1)$	$(0,0)$
Vértice	$\left(-2\sqrt{2},0\right)$	$\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-1-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$
Vértice	$(2\sqrt{2},0)$	$\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-1+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$
Vértice	$\left(0,-\sqrt{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$
Vértice	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-1+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$

Exercício 40. *Determine os focos, o centro, os vértices e os parâmetros das elipses:*

(1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$ *(2)* $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

Definição 7. *Seja* $\mathbb{E}$ *de semi-eixo focal medindo* c *e semi-eixo maior medindo* a. *A* ***excentricidade de*** $\mathbb{E}$ *é o número* $\frac{c}{a}$.

A excentricidade de uma elipse é sempre um real entre 0 e 1. Quando mais próximo de zero for a excentricidade, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Seguindo essa linha de reciocínio, alguns autores consideram que uma circunferência é uma elipse de excentricidade 0.

Exercício 41. *Para cada item, determine uma equação da elipse a partir das informações dadas. Determine os focos, o centro, os vértices e seus parâmetros, nos casos onde não houver a informação.*

(1) focos $F_1 = (3,8)$ *e* $F_2 = (3,2)$ *e comprimento do eixo maior 10.*
(2) excentricidade $e = \frac{3}{4}$ *e eixo menor com extremos* $(5,-1)$ *e* $(-3,-1)$.
(3) centro $C = (-1,-1)$, *excentricidade* $e = \frac{2}{3}$ *e* $(5,-1)$ *é vértice do eixo maior.*
(4) centro $C = (1,2)$, *foco* $F = (6,2)$ *e* $P = (4,6)$ *é um ponto da elipse.*
(5) centro em $r\colon y = 2$, *foco* $F = (3,4)$, *excentricidade* $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ *e com eixos paralelos aos eixos coordenados.*
(6) vértice $V = (3,-3)$ *e eixo menor de extremos* $B_1 = (2,2)$ *e* $B_2 = (-2,-2)$.

Exercício 42. *Determine uma equação da cônica com centro na reta* $r\colon x - 3 = 0$, *eixo focal paralelo ao eixo das abscissas, vértice* $V = (7,0)$ *e excentricidade* $e = \frac{1}{2}$. *Quais são os focos, o centro e os outros vértices dessa elipse?*

7. Retas e Elipses

Teorema 31. *Seja* $\mathbb{E}$ *uma elipse de focos* F_1 *e* F_2 *e excentricidade* e. *Existem* r_1 *e* r_2, *retas perpendiculares à reta focal, tais que, para o ponto* X,

$$X \in \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad d(X,F_1) = e \cdot d(X,r_1) \quad \Leftrightarrow \quad d(X,F_2) = e \cdot d(X,r_2)\ .$$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e $e = \frac{c}{a}$. Ainda $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Sejam $r_1\colon x + \frac{a^2}{c} = 0$ e $r_2\colon x - \frac{a^2}{c} = 0$. Naturalmente r_1 e r_2 são verticais e perpendiculares à reta focal. Para $X = (x,y)$,

$$d(X,F_1) = e\cdot d(X,r_1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \tfrac{c}{a}\left|x+\tfrac{a^2}{c}\right| \Leftrightarrow (x+c)^2+y^2 = \left(\tfrac{cx}{a}+a\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = \tfrac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2 \Leftrightarrow \left(1-\tfrac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2 = a^2-c^2 \Leftrightarrow \tfrac{b^2x^2}{a^2}+y^2 = b^2$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X\in\mathbb{E}\ .$$

Analogamente, mostra-se que $d(X,F_2) = e\cdot d(X,r_2)$ se, e somente se, $X\in\mathbb{E}$. □

Definição 8. *As retas r_1 e r_2 do teorema são chamadas de **diretrizes da elipse**.*

Corolário 8. *Se $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}$, as diretrizes de $\mathbb{E}$ são $r_1\colon x+\frac{a^2}{c}=0$ e $r_2\colon x-\frac{a^2}{c}=0$.* □

Exercício 43. *Uma matemática aceitou um cargo numa nova Universidade situada a 6km da margem retilínea de um rio. A professora deseja construir uma casa que esteja a uma distância à Universidade igual à metade da distância até a margem do rio. Os possíveis locais satisfazendo esta condição pertencem a uma curva. Determine esta curva e sua equação em relação a algum sistema (cartesiano) à sua escolha.*

Exercício 44. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse de parâmetros geométricos a, b e c. Determine a distância do centro de $\mathbb{E}$ às suas diretrizes.*

Exercício 45. *Seja $\mathbb{E}\colon \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, onde $a>b>0$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Determine equação para as diretrizes de $\mathbb{E}$.*

Definição 9. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse. Se $P,Q\in\mathbb{E}$ são distintos, dizemos que $\overline{PQ}$ é uma **corda de** $\mathbb{E}$. Se uma corda de $\mathbb{E}$ passa por algum dos focos, então é chamada de **corda focal**.*

Exercício 46. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse ou uma circunferência. Mostre que toda reta passando pelo centro de $\mathbb{E}$ a encontra exatemente duas vezes.*

Lema 32. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse. Toda reta passando por um dos focos de $\mathbb{E}$ a encontra exatamente duas vezes.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$ com $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Logo $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$.

Fixemos $\vec{v}=(p,q)\neq\vec{0}$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$F_1+\lambda\vec{v}\in\mathbb{E} \Leftrightarrow \tfrac{(-c+\lambda p)^2}{a^2}+\tfrac{(\lambda q)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \left(\tfrac{p^2}{a^2}+\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\left(\tfrac{2pc}{a^2}\right)\lambda+\tfrac{c^2}{a^2}-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{p^2}{a^2}+\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\left(\tfrac{2pc}{a^2}\right)\lambda-\tfrac{b^2}{a^2}=0\ .$$

Esta equação, por sua vez, tem duas raízes distintas pois seu discriminante

$$\Delta = \frac{4p^2c^2}{a^4}+\frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right) = \frac{4p^2(c^2+b^2)}{a^4}+\frac{4q^2}{a^2} = \frac{4(p^2+q^2)}{a^2} = \frac{4\|\vec{v}\|^2}{a^2} > 0\ .$$

Sendo assim, se r é reta que passa por F_1, então $r\cap\mathbb{E}$ tem exatamente dois elementos. Analogamente prova-se o mesmo para as retas que passam por F_2. □

Proposição 33. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse. Para cada foco de $\mathbb{E}$ existe uma corda focal de comprimento mínimo e esta é perpendicular à reta focal.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$ com $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Logo $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$.

Seja $\vec{v}=(p,q)\neq\vec{0}$. Usando os mesmos argumentos da demonstração do lema anterior, a equação $\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\left(\frac{2pc}{a^2}\right)\lambda-\frac{b^2}{a^2}=0$ tem discriminante $\Delta=\frac{4\|\vec{v}\|^2}{a^2}>0$ e, sendo assim, a tem duas soluções distintas. Sejam λ_1 e λ_2 estas duas soluções e ainda $X_1=F_1+\lambda_1\vec{v}$ e $X_2=F_1+\lambda_2\vec{v}$. Daí X_1 e X_2 determinam uma corda focal. Lembramos que $|\lambda_1-\lambda_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}$. Dado que $\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_1F_1}+\overrightarrow{F_1X_2} = \lambda_2\vec{v}-\lambda_1\vec{v} = (\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}$, deduzimos que

$$d(X_1,X_2) = |\lambda_1-\lambda_2|\cdot\|\vec{v}\| = \frac{2\|\vec{v}\|^2}{a\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)} = \frac{2(p^2+q^2)}{a\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}\ .$$

Observamos que

$$\frac{p^2+q^2}{a^2} \leq \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2} \leq \frac{p^2+q^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 \leq \frac{p^2+q^2}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}} \leq a^2 \ .$$

Logo $\frac{2b^2}{a} \leq d(X_1,X_2) \leq 2a$. Ainda,

$$d(X_1,X_2)=\frac{2b^2}{a} \Leftrightarrow \frac{2b^2}{a}=\frac{2(p^2+q^2)}{a\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)} \Leftrightarrow b^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)=p^2+q^2 \Leftrightarrow p=0 \Leftrightarrow \vec{v}//(0,1).$$

Concluímos que a corda $\overline{X_1X_2}$ tem comprimento mínimo se, e somente se, é vertical.

Para o foco F_2 os argumentos são análogos e o resultado é o mesmo. □

Definição 10. *Cada corda focal de uma elipse de comprimento mínimo é chamada de* ***latus rectum****.*

Exercício 47. *Determine fórmula para o comprimento dos* ***latera recta*** *de uma elipse.*

Exercício 48. *Determine equação para a elipse de focos $F_1=(-4,-2)$ e $F_2=(-4,-6)$ e latus rectum de medida 6.*

Proposição 34. *Seja $\mathbb{E}$ uma elipse ou uma circunferência. Se $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_3A_4}$ são cordas de $\mathbb{E}$, paralelas e distintas, então a reta determinada pelos seus pontos médios passa pelo centro de $\mathbb{E}$.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{E}$ e tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a \geq b > 0$. Sejam $A_1=(x_1,y_1)$, $A_2=(x_2,y_2)$, $A_3=(x_3,y_3)$ e $A_4=(x_4,y_4)$. Dado que $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_3A_4}$ são cordas de $\mathbb{E}$ paralelas, podemos fixar $\vec{v}=(p,q)\neq\vec{0}$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ambos não nulos, tais que $\overrightarrow{A_1A_2}=\lambda\vec{v}$ e $\overrightarrow{A_3A_4}=\mu\vec{v}$. Observamos que

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2} \Rightarrow 0=\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}+\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=\frac{\lambda p(x_2+x_1)}{a^2}+\frac{\lambda q(y_2+y_1)}{b^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{p(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{q(y_1+y_2)}{b^2}=0 \Leftrightarrow (x_1+x_2,y_1+y_2)\bullet\vec{u}=0 \ ,$$

onde $\vec{u}=\left(\frac{p}{a^2},\frac{q}{b^2}\right)$. Se M_1 é o ponto médio da corda $\overline{A_1A_2}$, então $\overrightarrow{OM_1}\perp\vec{u}$. Analogamente, prova-se que, se M_2 é o ponto médio da corda $\overline{A_3A_4}$, então $\overrightarrow{OM_2}\perp\vec{u}$. Sendo assim, $\overrightarrow{OM_1}$ e $\overrightarrow{OM_2}$ são paralelos. Consequentemente, O, M_1 e M_2 são colineares. □

Teorema 35. *Toda reta encontra uma elipse ou uma circunferência no máximo duas vezes.* □

Demonstração. Seja $\mathbb{E}$ uma elipse ou um circunferênca e fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a\geq b>0$. Seja r uma reta para passa por $X_0=(x_0,y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(p,q)\neq\vec{0}$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$, observamos que

$$X_0+\lambda\vec{v}\in\Gamma \Leftrightarrow \frac{(x_0+p\lambda)^2}{a^2}+\frac{(y_0+q\lambda)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2+2px_0\lambda+p^2\lambda^2}{a^2}+\frac{y_0^2+2qy_0\lambda+q^2\lambda^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2+2\left(\frac{px_0}{a^2}+\frac{qy_0}{b^2}\right)\lambda+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0 \ .$$

Dado que $\vec{v}\neq\vec{0}$, o número $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}$ nunca é nulo. Portanto esta equação é de fato uma equação do 2º.grau e tem no máximo duas soluções reais. Sendo assim, $r\cap\mathbb{E}$ tem no máximo dois elementos. □

Consequentemente, **não** há três pontos colineares em uma elipse, nem em uma circunferência.

Teorema 36. *Os únicos eixos de simetria de uma elipse são as retas suportes dos eixos maior e menor.*

Demonstração. Seja $\mathbb{E}$ uma elipse e suponhamos que r é um eixo de simetria para $\mathbb{E}$. Para cada ponto X, seja X' o simétrico de X com relação à reta r. Uma vez que $r\cap\mathbb{E}$ tem no máximo dois elementos e que $\mathbb{E}$ tem infinitos elementos, podemos fixar $P\in\mathbb{E}\backslash r=\mathbb{E}\backslash(\mathbb{E}\cap r)$. Caso $P=P'$, teríamos $P\in r$, o que não acontece. Logo $P\neq P'$ e determinam corda de $\mathbb{E}$. Fixemos $Q\in\mathbb{E}\setminus(r\cup\{P,P'\})$. Analogamente, $Q\neq Q'$ e também determinam corda de $\mathbb{E}$. Se $Q'=P'$ ou $Q'=P$, então $Q=P$ ou $Q=P'$, algo que não acontece. Portanto $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são cordas distintas. Como ambas são perpendiculares a r, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são segmentos paralelos. Pela proposição 34, seus pontos médios e o centro de $\mathbb{E}$ são colineares. Como estes pontos médios estão em r, o centro de $\mathbb{E}$ pertence a r.

Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$. Naturalmente, $(0,0)$ é o centro de $\mathbb{E}$. Ainda, $r\colon \alpha x+\beta y=0$, para $\vec{n}=(\alpha,\beta)\neq\vec{0}$. Como a reta $y=0$ é eixo de simentria

para $\mathbb{E}$, podemos supor que r não é horizontal, ou seja, que $\alpha \neq 0$. O vértice $A = (a, 0) \in \mathbb{E}$ e $A' \in \mathbb{E}$. Como o segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular a r e o seu ponto médio pertence a r, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A + \lambda\vec{n} \in r$ e $A + 2\lambda\vec{n} = A' \in \mathbb{E}$. Mas

$$A + \lambda\vec{n} \in r \Leftrightarrow \alpha(a + \lambda\alpha) + \beta^2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\alpha a}{\alpha^2 + \beta^2} \ .$$

Por sua vez, dado que $\lambda \neq 0$,

$$A + 2\lambda\vec{n} \in \mathbb{E} \Leftrightarrow \tfrac{(a+2\alpha\lambda)^2}{a^2} + \tfrac{(2\beta\lambda)}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \tfrac{a^2+4a\alpha\lambda+4\alpha^2\lambda^2}{a^2} + \tfrac{4\beta^2\lambda^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \tfrac{-\frac{\alpha}{a}}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}} \ .$$

Por outro lado,

$$\frac{-\alpha a}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-\frac{\alpha}{a}}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}} \Leftrightarrow \ a^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \frac{a^2\beta^2}{b^2} = \beta^2 \Leftrightarrow \beta = 0 \ ,$$

pois $a^2 \neq b^2$. Sendo assim, r é vertical. □

Exercício 49. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma circunferência de centro* C*. Se* r *é uma reta, mostre que* r *é eixo de simetria para* $\mathbf{C}$ *se, e somente se,* r *passa por* C*.*

Teorema 37. *Sejam* Γ *uma elipse ou uma circunferência e* $X_0 \in \Gamma$*. Existe uma única reta* t *tal que* $t \cap \Gamma = \{X_0\}$*.*

Demonstração. Seja Γ uma elipse ou um circunferênca e fixemos um sistema de coordenadas tal que $\Gamma\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a \geq b > 0$. Seja r uma reta para passa por $X_0 = (x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, observamos que

$$X_0 + \lambda\vec{v} \in \Gamma \Leftrightarrow \left(\tfrac{p^2}{a^2} + \tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 + 2\left(\tfrac{px_0}{a^2} + \tfrac{qy_0}{b^2}\right)\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \ \lambda = -2\left(\tfrac{\frac{px_0}{a^2}+\frac{qy_0}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\right) \ .$$

A solução $\lambda = 0$, corresponde ao ponto X_0, que é elemento de $\Gamma \cap r$. Portanto, $\Gamma \cap r$ é unitário se, e somente se, $\frac{px_0}{a^2} + \frac{qy_0}{b^2} = 0$. Dado que $X_0 \in \Gamma$, os vetores $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ e $\vec{u} = \vec{n}^{\perp} = \left(-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$ são ambos não nulos. Portanto,

$$\Gamma \cap r = \{X_0\} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} /\!/ \vec{u} \ .$$

Concluímos que a reta t, que passa por X_0 e é paralela ao vetor $\vec{u}$, é a única reta que encontra Γ uma única vez no ponto X_0. □

Definição 11. *Sejam* Γ *uma elipe ou uma circunferência e* $X_0 \in \Gamma$*. A* ***reta tangente a*** Γ ***no ponto*** X_0 *é a reta que passa por* X_0 *e tem interseção unitária com* Γ*. A* ***reta normal a*** Γ ***no ponto*** X_0 *é a reta que passa por* X_0 *e é perpendicular à reta tangente no mesmo ponto* X_0*.*

Corolário 9. *Se* $\Gamma\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*, onde* $a \geq b > 0$ *e* $X_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$*, então a reta tangente a* Γ *em* X_0 *tem equação* $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$*.*

Demonstração. Pela demonstração do teorema 37, a reta tangente é perpendicular ao vetor $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$. Uma vez que passa por X_0, uma equação para a reta tangente é $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0$. Mas

$$\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \ ,$$

pois que $X_0 \in \Gamma$. □

Teorema 38. *Seja* $\mathbb{E}$ *uma elipse de focos* F_1 *e* F_2*. Se* $X_0 \in \mathbb{E}$ *e* $\overrightarrow{n_0}$ *é vetor perpendicular à reta tangente a* $\mathbb{E}$ *em* X_0*, então* $\text{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \overrightarrow{n_0}) = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \overrightarrow{n_0})$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{E}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$. Se $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, então, sem perda de genaralidade, podemos escrever $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Se $X_0 = (x_0, y_0)$, então $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Se $\overrightarrow{n_0}$ é vetor perpendicular à reta tangente a $\mathbb{E}$ em X_0, então $\overrightarrow{n_0} = \lambda\vec{n}$, onde $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é não nulo. Pela proposição 24, $\|\overrightarrow{X_0F_1}\| = a + \frac{cx_0}{a} = \frac{a^2+cx_0}{a}$. Observamos que

$$\overrightarrow{X_0F_1} \bullet \vec{n} = (-c - x_0, -y_0) \bullet \vec{n} = \tfrac{-x_0(c+x_0)}{a^2} - \tfrac{y_0^2}{b^2} = \tfrac{-x_0c}{a^2} - \left(\tfrac{x_0^2}{a^2} + \tfrac{y_0^2}{b^2}\right) = -\left(\tfrac{cx_0}{a^2} + 1\right) = -\tfrac{\|\overrightarrow{X_0F_1}\|}{a} \ .$$

Se $\theta_1 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \overrightarrow{n_0})$, então

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{X_0F_1} \bullet \overrightarrow{n_0}}{\|\overrightarrow{X_0F_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_0}\|} = \frac{\overrightarrow{X_0F_1} \bullet (\lambda\overrightarrow{n})}{\|\overrightarrow{X_0F_1}\| \cdot |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{n}\|} = \frac{-|\lambda|}{a\lambda\|\overrightarrow{n}\|} \ .$$

Analogamente, concluímos que $\overrightarrow{X_0F_2} \bullet \overrightarrow{n} = -\frac{\|\overrightarrow{X_0F_2}\|}{a}$. Logo, se $\theta_2 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \overrightarrow{n_0})$, então $\cos\theta_2 = \frac{-|\lambda|}{a\lambda\|\overrightarrow{n}\|}$. Sendo assim, $\text{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \overrightarrow{n_0}) = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \overrightarrow{n_0})$ □

Este último resultado mostra que, se um raio de luz é emitido de um foco de uma elipse, ele se refletirá nela e incidirá no outro foco.

Exercício 50. *Obtenha equação das retas tangente e normal à cônica no ponto P.*

(1) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ *e* $P = (1, 1)$

(2) $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 32 = 0$ *e* $P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$

Exercício 51. *Determine as retas tangente à circunferência* $\mathbf{C}\colon x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$*, que passam pelo ponto* $P = (1, 0)$*.*

8. Hipérboles

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos e uma constante a tal que $0 < a < \frac{d(F_1,F_2)}{2}$. A **hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro** a é a curva determinada pelos pontos cujo módulo da diferença das distâncias aos focos é $2a$. Se $\mathbb{H}$ é a hipérbole determinada por F_1, F_2 e a, então, para o ponto X,

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a.$$

Seja C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Suponhamos que $X \in \mathbb{H}$ e seja Y o simétrico de X com relação a C. Sendo assim, $\overrightarrow{YC} = \overrightarrow{CX}$,

$$\overrightarrow{YF_2} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_2} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_1C} = \overrightarrow{F_1X} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{YF_1} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{CF_1} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{F_2C} = \overrightarrow{F_2X}.$$

Portanto

$$d(Y, F_1) - d(Y, F_2) = d(X, F_2) - d(X, F_1) = 2a \ .$$

Ou seja, $Y \in \mathbb{H}$.

Definição 12. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado de* ***segmento focal****, enquanto a* ***reta focal*** *é a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$. O ponto médio do segmento focal é chamado de* ***centro de*** *$\mathbb{H}$. A* ***distância focal*** *é o número $d(F_1, F_2)$. Se $X \in \mathbb{H}$, os* ***raios focais de*** *X são as distâncias de X aos focos de $\mathbb{H}$.*

Provamos acima que a hipérbole é **simétrica** com relação ao seu centro.

Definição 13. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2. Os conjuntos*

$$\mathbb{H}_1 = \{P \in \mathbb{H}\colon d(P, F_1) < d(P, F_2)\} \quad e \quad \mathbb{H}_2 = \{P \in \mathbb{H}\colon d(P, F_2) < d(P, F_1)\}$$

são chamados de ***ramos da hipérbole*** *$\mathbb{H}$.*

Observamos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$ e que $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \emptyset$. Ainda, se P é ponto do plano e Q é o simétrico de P com relação a C, então $P \in \mathbb{H}_1$ se, e somente, $Q \in \mathbb{H}_2$, por causa da discussão feita acima.

Fixemos um sistema de coordenadas no qual a reta focal seja horizontal. Portanto $C = (h, k)$. Dado que $\overrightarrow{CF_1} = -\overrightarrow{CF_2}$, que são ambos paralelos a $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, podemos fixar $\overrightarrow{CF_2} = (c, 0)$, com $c > 0$. Daí $F_2 = C + \overrightarrow{CF_2} = (h + c, k)$ e $F_1 = C - \overrightarrow{CF_2} = (h - c, k)$. Como $d(F_1, F_2) = 2c$, deduzimos que $0 < a < c$. Se $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, então $c > b > 0$ e $c^2 = a^2 + b^2$. Os números a, b e c são chamados de **parâmetros geométricos** da hipérbole. Quando os números a e b são iguais, diremos que a hipérbole é **equilátera**.

Procuremos agora uma equação para a hipérbole $\mathbb{H}$ nas condições acima. Para $X = (x, y)$, sejam $u = x - h$ e $v = y - k$. Logo

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right| = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(u+c)^2+v^2}-\sqrt{(u-c)^2+v^2}\right| = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)+2cu}-\sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)-2cu}\right| = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(u^2+c^2+v^2\right)-2\sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)^2-4c^2u^2} = 4a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(u^2+c^2+v^2\right)^2-4c^2u^2} = \left(u^2+c^2+v^2\right)-2a^2 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left(u^2+c^2+v^2\right)^2-4c^2u^2 = \left(\left(u^2+c^2+v^2\right)-2a^2\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4c^2u^2 = -4a^2\left(u^2+c^2+v^2\right)+4a^4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2\left(u^2+c^2+v^2\right)-c^2u^2 = a^4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -b^2u^2+a^2v^2 = (a^2-c^2)u^2+a^2v^2 = a^4-a^2c^2 = a^2(a^2-c^2)-a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ .$$

Acabamos de mostrar que, se $X \in \mathbb{H}$, então $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A proposição a seguir vai mostrar a recíproca, o que finaliza a procura por alguma equação da hipérbole $\mathbb{H}$.

Proposição 39. *Nas mesmas condições da discussão feita até este instante, se $X = (x, y)$ é um ponto do plano que satisfaz a equação $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, então $d(X, F_1) = \left|\frac{c(x-h)}{a}+a\right|$ e $d(X, F_2) = \left|\frac{c(x-h)}{a}-a\right|$. Além disso, X pertence à hipérbole $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Fixemos $X = (x, y)$ nas condições da hipótese. Daí $(y-k)^2 = -b^2+\frac{b^2(x-h)^2}{a^2}$ e

$$\left(d(X,F_1)\right)^2 = (x-h+c)^2+(y-k)^2 = (x-h)^2+2c(x-h)+c^2-b^2+\frac{b^2(x-h)^2}{a^2} =$$
$$= (x-h)^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)+2c(x-h)+a^2 = \frac{c^2(x-h)^2}{a^2}+2c(x-h)+a^2 = \left(\frac{c(x-h)}{a}+a\right)^2 .$$

Ou seja, $d(X, F_1) = \left|\frac{c(x-h)}{a}+a\right|$. Analogamente, induzimos que $d(X, F_2) = \left|\frac{c(x-h)}{a}-a\right|$. Como $\frac{(x-h)^2}{a^2} = 1+\frac{(y-k)^2}{b^2} \geq 1$, deduzimos que $\frac{c^2(x-h)^2}{a^2} \geq c^2 > a^2$ e $\left(\frac{c(x-h)}{a}-a\right)\left(\frac{c(x-h)}{a}+a\right) > 0$. Ou seja, os números $\left(\frac{c(x-h)}{a}-a\right)$ e $\left(\frac{c(x-h)}{a}+a\right)$ têm mesmo sinal. Se ambos são positivos, então $d(X, F_1)-d(X, F_2) = 2a$. Caso ambos sejam negativos, então $d(X, F_1)-d(X, F_2) = -2a$. Em qualquer situação, $\left|d(X, F_1)-d(X, F_2)\right| = 2a$ e $X \in \mathbb{H}$. □

Portanto fica demonstrado o teorema:

Teorema 40. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $c > a > 0$ e $b = \sqrt{c^2-a^2}$. Dados os pontos $C = (h, k)$, $F_1 = (h-c, k)$ e $F_2 = (h+c, k)$, seja $\mathbb{H}$ a hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ .$$

□

Corolário 10. *Nas condições do teorema anterior, se $\mathbb{H}_1 = \{P \in \mathbb{H}\colon d(P, F_1) < d(P, F_2)\}$ e $\mathbb{H}_2 = \{P \in \mathbb{H}\colon d(P, F_2) < d(P, F_1)\}$ são os ramos de $\mathbb{H}$, então $\mathbb{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{H}\colon x \leq h-a\}$, enquanto $\mathbb{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{H}\colon x \geq h+a\}$.*

Demonstração. Fixemos $X = (x, y) \in \mathbb{H}$ tal que $x \leq h-a$. Logo $\frac{(x-h)}{a} \leq -1$, $\frac{c(x-h)}{a} \leq -c \leq -a < a$. Daí, pela proposição 24,

$$d(X, F_1) = -a-\frac{c(x-h)}{a} \qquad \text{e} \qquad d(X, F_2) = a-\frac{c(x-h)}{a} \ .$$

Consequentemente, $d(X, F_1) < d(X, F_2)$ e $X \in \mathbb{H}_1$.

Acabamos por provar que $\{(x, y) \in \mathbb{H}\colon x \leq h-a\} \subseteq \mathbb{H}_1$. Analogamente, é possível mostrar que $\{(x, y) \in \mathbb{H}\colon x \geq h+a\} \subseteq \mathbb{H}_2$. Agora, tomemos $Y = (x, y) \in \mathbb{H}_1$. Dado que $\frac{(x-h)^2}{a^2} \geq 1$, então $|x-h| \geq$

a. Como $Y \notin \mathbb{H}_2$, então $x-h \leq -a$, ou seja, $x \leq h-a$. Concluímos que $\mathbb{H}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{H}\colon x \leq h-a\}$. Por argumentos análogos, deduzimos que $\mathbb{H}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{H}\colon x \geq h+a\}$. □

Exercício 52. *Nas condições do teorema anterior, sejam $X_1, X_2 \in \mathbb{H}$. Mostre que, se $X_1 = (x_1, y_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2)$, então X_1 e X_2 estão no mesmo ramo de $\mathbb{H}$ se, e somente se, $(x_1 - h)(x_2 - h) > 0$.*

Corolário 11. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $c > a > 0$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Dados os pontos $C = (h,k)$, $F_1 = (h, k-c)$ e $F_2 = (h, k+c)$, seja $\mathbb{H}$ a hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro a. Para um ponto $X = (x,y)$,*

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \ .$$

Demonstração. Primeiro tomemos a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$. Logo $C = (0,0)$, $F_1 = (0,-c)$ e $F_2 = (0,c)$, no sistema (u,v). Rotacionemos os eixos de (u,v) por $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$. Daí $C = (0,0)$, $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ no sistema (t,w). Pelo teorema anterior:

$$X = (t,w) \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{a^2} - \frac{w^2}{b^2} = 1 \ .$$

Uma vez que $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, deduzimos que $\mathbb{H}\colon \frac{v^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} = 1$. Finalmente, no sistema (x,y):

$$X = (x,y) \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \ .$$

□

Exercício 53. *Tomando como exemplo o corolário 10, descreva os ramos de $\mathbb{H}$ nas condições do corolário anterior.*

Uma consequência imediata destes dois últimos resultados é que toda hipérbole com reta focal paralela a um dos eixos coordenados tem **equação de 2º.grau sem termo misto**. Se a reta focal é horizontal, então o "sinal negativo" aparece no termo de 2º.grau na segunda coordenada; enquanto no caso em que a reta focal é vertical, o "sinal negativo" aparece no termo de 2º.grau na primeira coordenada. O parâmetro a sempre acompanha o termo de "sinal positivo".

Teorema 41. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de centro C e parâmetros geométricos a, b e c. Para todo $X \in \mathbb{H}$, $d(X,C) \geq a$.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x,y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0,0)$ e $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Para $X = (x,y) \in \mathbb{H}$,

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Portanto $x^2 + y^2 \geq a^2$ e, consequentemente, $d(X,C) = \sqrt{x^2+y^2} \geq a$. □

Corolário 12. *Nas mesmas condições do teorema anterior, existem $A_1, A_2 \in \mathbb{H}$, simétricos com relação a C, tal que, para $X \in \mathbb{H}$, $d(X,C) = a$ se, e somente se, $X = A_1$ ou $X = A_2$. Ademais, A_1 e A_2 estão na reta focal.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x,y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0,0)$ e $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sejam $A_2 = (a,0)$ e $A_1 = (-a,0)$. Logo deduzimos que C é ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ e que os dois pontos estão no eixo focal, que é a reta $y = 0$. Também é imediato que A_1 e A_2 são pontos de $\mathbb{H}$ e que $d(A_1,C) = d(A_2,C) = a$. Suponhamos $X = (x,y) \in \mathbb{H}$ tal que $d(X,C) = a$. Logo

$$1 = \frac{x^2+y^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Sendo asssim, $\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ e $y = 0$. Consequentemente, $x = a$ ou $x = -a$. □

Definição 14. *Os pontos A_1 e A_2 do corolário anterior são chamados de **vértices da hipérbole**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de **eixo transverso (ou real) da hipérbole**.*

Exercício 54. *Determine fórmula para as distâncias dos vértices de uma hipérbole aos seus focos.*

Exercício 55. *Mostre que todo ramo de qualquer hipérbole é* ***conjunto ilimitado e infinito****.*

Proposição 42. *Nas mesmas condições do teorema anterior, existem B_1, B_2, pontos distintos e simétricos com relação a C, tais que B_1 e B_2 juntamente com os vértices de $\mathbb{H}$, determinam um losango com lados medindo c.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) com origem em C e tal que a reta focal seja horizontal. Daí $C = (0, 0)$ e $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sejam $B_2 = (0, b)$ e $B_1 = (0, -b)$. Os vértices de $\mathbb{H}$ são $A_2 = (a, 0)$ e $A_1 = (-a, 0)$. Visto que $c^2 = a^2 + b^2$, $A_1B_1A_2B_2$ é um losango cujos lados medem c. □

Definição 15. *O segmento $\overline{B_1B_2}$ é chamado de* ***eixo conjugado (ou imaginário) da hipérbole****.*

Vale observar que os eixos transverso e conjugado de uma hipérbole são perpendiculares entre si e compartilham do mesmo ponto médio, que é o centro da hipérbole.

Definição 16. *Seja a hipérbole $\mathbb{H}$: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. As retas $\left(\frac{x-h}{a}\right) - \left(\frac{y-k}{b}\right) = 0$ e $\left(\frac{x-h}{a}\right) + \left(\frac{y-k}{b}\right) = 0$ são chamadas de* ***assíntotas de*** *$\mathbb{H}$.*

É possível mostrar que os pontos da hipérbole se aproximam das assíntotas conforme se afastam do centro da hipérbole. Nota-se também que as assíntotas não encontram a hipérbole e são retas concorrentes no centro dela.

Exercício 56. *Mostre que as retas suportes dos eixos transverso e conjugado são eixos de simetria para uma hipérbole.*

Exercício 57. *Determinar os focos, os vértices, o centro, os parâmetros e as assíntotas de cada uma das* ***hipérboles*** *abaixo:*

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
(2) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$
(3) $x^2 - 9y^2 = 1$
(4) $y^2 - x^2 = 2$
(5) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$
(6) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$
(7) $25x^2 - 4y^2 + 40y = 0$
(8) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

Exercício 58. *Sejam $\mathbb{H}$ uma hipérbole tal que $\mathbb{H}$: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$, e r uma reta paralela ao vetor não nulo $\vec{v} = (p, q)$. Mostre que r é paralela a alguma das assíntotas de $\mathbb{H}$ se, e somente se, $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 0$.*

Exercício 59. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de parâmetros geométricos a, b e c. Mostre que o produto das distâncias de um ponto de $\mathbb{H}$ às assíntotas é uma constante. Determine essa constante.*

Exercício 60. *As assíntotas de uma hipérbole determinam quatro ângulos. Mostre que a reta focal desta hipérbole contem duas das bissetrizes destes ângulos.*

Teorema 43. *Toda hipérbole admite equação $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$, onde $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} < 0$ e $\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \neq 0$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de centro $C = (h, k)$ e parâmetros a, b e c. Aplicando a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$, obtemos que $C = (0, 0)$, no sistema (u, v). Usemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que deixa a reta focal horizontal. Pelo teorema 40, $\mathbb{H}$: $\frac{t^2}{a^2} - \frac{w^2}{b^2} = 1$, no sistema (t, w). Mas

$$\frac{t^2}{a^2} - \frac{w^2}{b^2} = \begin{pmatrix} t & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{pmatrix}$, para $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, dado que é matriz simétrica. Logo, no sistema (u,v), $\mathbb{H}\colon \alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2-1=0$. Pela proposição 7, deduzimos que as matrizes $\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}$ têm mesmo determinante. Sendo assim, $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}=-\frac{1}{a^2b^2}<0$.

No sistema original, $\mathbb{H}\colon \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$, e, pela proposição 2,

$$\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2}\neq 0\ ,$$

o qual conclui a tese do teorema. □

Agora vejamos uma recíproca para o teorema anterior.

Teorema 44. *Seja* $\Gamma\colon \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}<0$ *e* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}\neq 0$.

Então Γ *representa uma hipérbole.*

Demonstração. Dado que $\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0$, existem únicos $h,k\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\ .$$

Logo a translação $\begin{cases}x=u+h\\ y=v+k\end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1º.grau. Por conseguinte, no sistema (u,v), $\Gamma\colon \alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2+f'=0$, para algum $f'\in\mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$0\neq\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & 0\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0\\ 0 & 0 & f'\end{vmatrix}=\left(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)f'\ ,$$

e consequentemente $f'\neq 0$.

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ w\end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t,w), $\Gamma\colon \delta t^2+\epsilon w^2+f'=0$, para $\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$, satisfazendo $\delta+\epsilon=\alpha+\gamma$ e $\delta\epsilon=\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7. Portanto $\delta\epsilon<0$, $\frac{\delta\epsilon}{(f')^2}<0$ e os números $\frac{\delta}{f'}$ e $\frac{\epsilon}{f'}$ têm sinais contrários. Podemos escrever $\Gamma\colon\ -\left(\frac{\delta}{f'}\right)t^2-\left(\frac{\epsilon}{f'}\right)w^2=1$. Se $\frac{\delta}{f'}>0$, então $\frac{\epsilon}{f'}<0$. Sejam $\lambda=\sqrt{\frac{f'}{\delta}}$ e $\mu=\sqrt{-\frac{f'}{\epsilon}}$. Logo $\Gamma\colon \frac{t^2}{\lambda^2}-\frac{w^2}{\mu^2}=1$ é uma hipérbole. O mesmo acontece se $\frac{\delta}{f'}<0$. □

Teorema 45. *Seja* $\Gamma\colon \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0$ *uma cônica onde* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{vmatrix}<0$ *e* $\begin{vmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{vmatrix}=0$.

Então Γ *representa a união de duas retas concorrentes.*

Demonstração. Dado que $\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0$, existem únicos $h,k\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\ .$$

Logo a translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$ anula os coeficientes dos termos de 1º.grau. Por conseguinte, no sistema (u, v), $\Gamma\colon \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + f' = 0$, para algum $f' \in \mathbb{R}$. Pela proposição 2,

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{vmatrix} = \left(\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right) f' \ ,$$

e consequentemente $f' = 0$.

Tomemos uma rotação $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ que elimina o termo misto. Sendo assim, no sistema (t, w), $\Gamma\colon \delta t^2 + \epsilon w^2 = 0$, para $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, satisfazendo $\delta + \epsilon = \alpha + \gamma$ e $\delta\epsilon = \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}$, pela proposição 7. Portanto $\delta\epsilon < 0$ e δ e seja $\sigma = \sqrt{-\delta\epsilon}$. Logo

$$\delta t^2 + \epsilon w^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = \delta^2 t^2 - \sigma^2 w^2 = (\delta t - \sigma w)(\delta t + \sigma w) \quad \Leftrightarrow \quad \delta t - \sigma w = 0 \text{ ou } \delta t + \sigma w = 0 \ .$$

Concluímos que Γ representa a união de duas retas concorrentes na origem do sistema (t, w), ou seja, duas retas concorrentes no ponto (h, k) no sistema original. □

Observação 3. *Nas condições do teorema, a translação, que elimina os termos de 1º.grau, determina o centro de hipérbole ou o ponto de encontro das duas retas concorrentes.*

Exemplo 5. *A demonstração do teorema nos deu um roteiro de como determinar qual cônica a equação ela representa: efetuar um translação e depois uma rotação!*

Por exemplo, seja $\Gamma\colon (x+1)(y-2) = 1$. *Depois da translação* $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$, *obtemos* $\Gamma\colon uv = 1$.

Para a rotação, estudemos as raízes de $\begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}$, *que são* $\frac{1}{2}$ *e* $-\frac{1}{2}$. *O sistema* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *tem soluções* $(\alpha, \beta) // (1, 1)$. *Depois da rotação* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$, *chegamos a* $\Gamma\colon \frac{t^2}{2} - \frac{w^2}{2} = 1$, *que é uma* ***hipérbole de reta focal horizontal*** *com parâmetros* $a = b = \sqrt{2}$ *e* $c = 2$. *A seguir colocamos as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices nos diferentes sistemas:*

	(t, w)	(u, v)	(x, y)
Centro	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(-1, 2)$
Foco	$(-2, 0)$	$\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right)$
Foco	$(2, 0)$	$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$	$\left(-1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$
Vértice	$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$	$(-1, -1)$	$(-2, 1)$
Vértice	$\left(\sqrt{2}, 0\right)$	$(1, 1)$	$(0, 3)$

As retas $t = w$ *e* $t = -w$ *são as assíntotas de* Γ. *Como* $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *e* $\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$,

$$t = w \Leftrightarrow \tfrac{u+v}{\sqrt{2}} = \tfrac{-u+v}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad e$$
$$t = -w \Leftrightarrow \tfrac{u+v}{\sqrt{2}} = \tfrac{u-v}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow y = 2.$$

Deduzimos que as assíntotas têm equações $x = -1$ *e* $y = 2$ *no sistema* (x, y).

Exercício 61. *Determine os focos, o centro, os vértices, os parâmetros e as assíntotas das hipérbole:*
(1) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$ *(2)* $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

Exercício 62. *As cônicas abaixo são união de retas. Determine-as.*
(1) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$ *(3)* $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$
(2) $5x^2 + 27xy - 73x + 10y^2 - 250y + 240 = 0$ *(4)* $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$

Definição 17. *Seja* $\mathbb{H}$ *de semi-eixo focal medindo* c *e semi-eixo tranverso medindo* a. *A* ***excentricidade de*** $\mathbb{H}$ *é o número* $\frac{c}{a}$.

A excentricidade de uma hipérbole é sempre um real estritamente maior que 1.

Exercício 63. *Determine uma equação de hipérbole equilátera de focos $F_1 = (1, 6)$ e $F_2 = (1, -2)$.*

Exercício 64. *As assíntotas de uma hipérbole $\mathbb{H}$ são perpendiculares entre si e uma delas é paralela à reta $r\colon x + y = 0$. Sabendo que $\mathbb{H}$ tem eixo focal horizontal e centro $C = (1, -2)$, determine equação de $\mathbb{H}$.*

Exercício 65. *Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da hipérbole a partir das informações dadas. Determine os focos, o centro, os vértices, seus parâmetros e suas assíntotas, nos casos onde não houver a informações.*

(1) focos $F_1 = (-1, 3)$ e $F_2 = (-7, 3)$ e comprimento do eixo transverso igual a 4,
(2) focos $F_1 = (2, 13)$ e $F_2 = (2, -13)$ e comprimento do eixo conjugado igual a 24,
(3) centro $C = (0, 0)$, um dos focos $F = (4, 4)$ e um dos vértices $V = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,
(4) assíntotas $r\colon 4x + y - 11 = 0$ e $s\colon 4x - y - 13 = 0$ e um dos vértices $V = (3, 1)$,
(5) focos $F_1 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e parâmetro $2\sqrt{2}$.

Exercício 66. *Determine uma equação da elipse, com excentricidade $e = \frac{1}{3}$ e cujos focos coincidem com os vértices da hipérbole $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$*

Exercício 67. *Da hipérbole $\mathbb{H}\colon y = \frac{1}{x} - \frac{3x}{4}$, determine seus focos, seus vértices e suas retas assíntotas.*

9. Retas e Hipérboles

Teorema 46. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Existem r_1 e r_2, retas perpendiculares à reta focal, tais que, para o ponto X,*

$$X \in \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad d(X, F_1) = e \cdot d(X, r_1) \quad \Leftrightarrow \quad d(X, F_2) = e \cdot d(X, r_2)\ .$$

Demonstração. Fixemos um sisema de coordenadas com origem no centro de $\mathbb{H}$ e tal que a reta focal seja horizontal. Logo $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $e = \frac{c}{a}$. Ainda $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Sejam $r_1\colon x + \frac{a^2}{c} = 0$ e $r_2\colon x - \frac{a^2}{c} = 0$. Naturalmente r_1 e r_2 são verticais e perpendiculares à reta focal. Para $X = (x, y)$,

$$d(X, F_1) = e \cdot d(X, r_1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \tfrac{c}{a}\left|x + \tfrac{a^2}{c}\right| \Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = \left(\tfrac{cx}{a} + a\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = \tfrac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 \Leftrightarrow \left(1 - \tfrac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow -\tfrac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = -b^2$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathbb{H}\ .$$

Analogamente, mostra-se que $d(X, F_2) = e \cdot d(X, r_2)$ se, e somente se, $X \in \mathbb{H}$. □

Definição 18. *As retas r_1 e r_2 do teorema são chamadas de **diretrizes da hipérbole**.*

Corolário 13. *Se $\mathbb{H}\colon \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, então as diretrizes de $\mathbb{H}$ são $r_1\colon x - h + \frac{a^2}{c} = 0$ e $r_2\colon x - h - \frac{a^2}{c} = 0$.* □

Exercício 68. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de parâmetros geométricos a, b e c. Determine a distância do centro de $\mathbb{H}$ às suas diretrizes.*

Exercício 69. *Seja $\mathbb{H}\colon -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Determine equação para as diretrizes de $\mathbb{H}$.*

Definição 19. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole. Se $P, Q \in \mathbb{H}$ são distintos, dizemos que $\overline{PQ}$ é uma **corda de** $\mathbb{H}$. Se uma corda de $\mathbb{H}$ passa por algum dos focos, então é chamada de **corda focal**.*

Exercício 70. *Encontre o comprimento da(s) corda(s) focal(is) à cônica $\mathbb{H}\colon \frac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1$, que é(são) paralela(s) à reta $x + y = 0$.*

Lema 47. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de centro C. Se r não é reta assíntota mas é paralela a uma das assíntotas, então $r \cap \mathbb{H}$ é conjunto unitário.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x, y) com origem no centro de $\mathbb{H}$. Daí $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. As assíntotas de $\mathbb{H}$ são as retas $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$, portanto são retas paralelas aos vetores (a, b) e $(-a, b)$, respectivamente.

Suponhamos que (a,b) é vetor diretor de r e que r passa pelo ponto $X_0=(x_0,y_0)$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$, observamos que:

$$X_0+\lambda\vec{v}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow\frac{(x_0+\lambda a)^2}{a^2}-\frac{(y_0+\lambda b)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow 2\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\lambda+\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0\ .$$

Se $\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}=0$, então X_0 é ponto da assíntota $bx-ay=0$, o que é um absurdo pois r é paralela e distinta desta assíntota. Sendo assim, a equação acima admite uma única solução e r encontra $\mathbb{H}$ em um único ponto.

Por argumentos análogos, mostra-se que, se r é paralela à assintota $bx+ay=0$ mas é distinta dela, então $r\cap\mathbb{H}$ é conjunto unitário. □

Teorema 48. *Uma hipérbole e uma reta se encontram no máximo duas vezes.*

Demonstração. Sejam $\mathbb{H}$ uma hipérbole e r uma reta. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{H}$. Daí $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>0$ e $b>0$. As assíntotas de $\mathbb{H}$ são as retas $bx-ay=0$ e $bx+ay=0$, portanto são retas paralelas aos vetores (a,b) e $(-a,b)$, respectivamente. Seja $\vec{v}=(p,q)$ um vetor diretor de r.

Se r é uma das assíntotas, então $r\cap\mathbb{H}=\emptyset$. Se r não é assíntota mas é paralela a alguma delas, então $r\cap\mathbb{H}$ é unitário, pelo lema anterior. Suponhamos que r não é paralela a nenhumas das assíntotas. Neste caso, $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\neq 0$, pelo exercício 58. Seja $X_0=(x_0,y_0)\in r$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$X_0+\lambda\vec{v}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow\tfrac{(x_0+\lambda p)^2}{a^2}-\tfrac{(y_0+\lambda q)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2+2\left(\tfrac{x_0p}{a}-\tfrac{y_0q}{b}\right)\lambda+\left(\tfrac{x_0^2}{a^2}-\tfrac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0\ .$$

Como a equação tem no máximo duas raízes reais, então $r\cap\mathbb{H}$ tem no máximo dois elementos. □

Consequentemente, não há 3 pontos colineares em uma hipérbole.

Proposição 49. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole. Para cada foco de $\mathbb{H}$ existe uma corda focal de comprimento mínimo e com extremos no mesmo ramo. Ainda, esta é perpendicular à reta focal.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x,y) com origem no centro de $\mathbb{H}$. Daí $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>0$ e $b>0$. Se $c=\sqrt{a^2+b^2}$, então que $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$ são os focos de $\mathbb{H}$. Fixemos $\vec{v}=(p,q)$, vetor não nulo e não paralelo às assíntotas. Seja r a reta que passa por F_1 e é paralela a $\vec{v}$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$F_1+\lambda\vec{v}\in\mathbb{H}\Leftrightarrow\tfrac{(\lambda p-c)^2}{a^2}-\tfrac{(\lambda q)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\tfrac{2pc}{a^2}\lambda+\tfrac{c^2}{a^2}-1=0\Leftrightarrow\left(\tfrac{p^2}{a^2}-\tfrac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2-\tfrac{2pc}{a^2}\lambda+\tfrac{b^2}{a^2}=0\ .$$

Pelo exercício 58, $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\neq 0$ e esta equação é de fato de 2º.grau. Seu discriminante é

$$\Delta=\frac{4p^2c^2}{a^4}-\frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right)=\frac{4p^2}{a^4}(c^2-b^2)+\frac{4q^2}{a^2}=\frac{4(p^2+q^2)}{a^2}=\frac{4\|\vec{v}\|^2}{a^2}\ .$$

Visto que $\vec{v}\neq\vec{0}$, a equação admite duas soluções distintas e a reta r encontra $\mathbb{H}$ exatamente duas vezes. Sejam λ_1 e λ_2 as duas raízes desta equação e $X_1=F_1+\lambda_1\vec{v}$ e $X_2=F_1+\lambda_2\vec{v}$. Já que $X_1=(\lambda_1p-c,\lambda_1q)$ e $X_2=(\lambda_2p-c,\lambda_2q)$, pelo exercício 52, estudemos o sinal de $(\lambda_1p-c)(\lambda_2p-c)$. Por sua vez

$$(\lambda_1p-c)(\lambda_2p-c)=\lambda_1\lambda_2p^2-pc(\lambda_1+\lambda_2)+c^2=\frac{\frac{b^2p^2}{a^2}-\frac{2p^2c^2}{a^2}+c^2\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right)}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}=\frac{\frac{p^2}{a^2}(b^2-c^2)-\frac{c^2q^2}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}=\frac{-p^2-\frac{c^2q^2}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}}\ .$$

Logo X_1 e X_2 estarão no mesmo ramo se, e somente se, $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}<0$. Lembramos que $\overrightarrow{X_1X_2}=\overrightarrow{X_1F_1}+\overrightarrow{F_1X_2}=\overrightarrow{F_1X_2}-\overrightarrow{F_1X_1}=\lambda_2\vec{v}-\lambda_1\vec{v}=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}$ e que $|\lambda_1-\lambda_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{\left|\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right|}$. Portanto,

$$d(X_1,X_2)=|\lambda_2-\lambda_1|\cdot\|\vec{v}\|=\frac{2\|\vec{v}\|^2}{a\left|\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right|}=\frac{2(p^2+q^2)}{a\left|\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right|}\ .$$

Como $\frac{p^2+q^2}{b^2}\geq\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}>0$, deduzimos que $\frac{p^2+q^2}{\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}}\geq b^2$ e que $d(X_1,X_2)\geq\frac{2b^2}{a}$. Ainda,

$$d(X_1,X_2)=\frac{2b^2}{a}\Leftrightarrow\frac{p^2+q^2}{\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}}=b^2\Leftrightarrow p^2+q^2=q^2-\frac{b^2p^2}{a^2}\Leftrightarrow p=0\Leftrightarrow\vec{v}//(0,1)\ .$$

Concluímos que a corda focal que passa pelo foco F_1, tem extremos no mesmo ramo e tem comprimento mínimo é perpendicular à reta focal.

Com cálculos e argumentos análogos, concluímos o mesmo para a corda focal que passa por F_2. □

Definição 20. *Cada corda focal de uma hipérbole de comprimento mínimo com extremos no mesmo ramo é chamada de* ***latus rectum****.*

Exercício 71. *Determine fórmula para o comprimento dos* ***latera recta*** *de uma hipérbole.*

Exercício 72. *Determine equação da hipérbole, os focos, o centro, os parâmetros, as assíntotas e as diretrizes da hipérbole de vértices $V_1 = (5, 4)$ e $V_2 = (1, 4)$ e latera recta medindo 5.*

Proposição 50. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole. Se $\overline{X_1X_2}$ e $\overline{X_3X_4}$ são cordas de $\mathbb{H}$, paralelas e distintas, então a reta determinada pelos seus pontos médios passa pelo centro de $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Podemos fixar um sistema de coordenadas (x, y) com origem no centro de $\mathbb{H}$ e tal que $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Sejam $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$, $X_3 = (x_3, y_3)$ e $X_4 = (x_4, y_4)$. Dado que $\overline{X_1X_2}$ e $\overline{X_3X_4}$ são cordas de $\mathbb{H}$ paralelas, podemos fixar $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ambos não nulos, tais que $\overrightarrow{X_1X_2} = \lambda\vec{v}$ e $\overrightarrow{X_3X_4} = \mu\vec{v}$.

Observamos que

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\lambda p(x_1+x_2)}{a^2} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{a^2} = \frac{y_2^2-y_1^2}{b^2} = \frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{b^2} = \frac{\lambda q(y_1+y_2)}{b^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{p(x_1+x_2)}{a^2} - \frac{q(y_1+y_2)}{b^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \bullet \vec{u} = 0 \ ,$$

onde $\vec{u} = \left(\frac{p}{a^2}, -\frac{q}{b^2}\right)$. Se M_1 é o ponto médio da corda $\overline{X_1X_2}$, então $\overrightarrow{OM_1} \perp \vec{u}$. Analogamente, prova-se que, se M_2 é o ponto médio da corda $\overline{X_3X_4}$, então $\overrightarrow{OM_2} \perp \vec{u}$. Sendo assim, $\overrightarrow{OM_1}$ e $\overrightarrow{OM_2}$ são paralelos. Consequentemente, O, M_1 e M_2 são colineares. □

Corolário 14. *Os únicos eixos de simetria de uma hipérbole são as retas suportes dos eixos transverso e conjugado.*

Demonstração. Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole e suponhamos que r é um eixo de simetria para $\mathbb{H}$. Para cada ponto X, seja X' o simétrico de X com relação à reta r. Uma vez que $r \cap \mathbb{H}$ tem no máximo dois elementos e que $\mathbb{H}$ tem infinitos elementos, podemos fixar $P \in \mathbb{H}\backslash r = \mathbb{H}\backslash(\mathbb{H}\cap r)$. Caso $P = P'$, teríamos $P \in r$, o que não acontece. Logo $P \neq P'$ e determinam corda de $\mathbb{H}$. Fixemos $Q \in \mathbb{H} \setminus (r \cup \{P, P'\})$. Analogamente, $Q \neq Q'$ e também determinam corda de $\mathbb{H}$. Se $Q' = P'$ ou $Q' = P$, então $Q = P$ ou $Q = P'$, algo que não acontece. Portanto $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são cordas distintas. Como ambas são perpendiculares a r, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são segmentos paralelos. Pela proposição 50, seus pontos médios e o centro de $\mathbb{H}$ são colineares. Como estes pontos médios estão em r, o centro de $\mathbb{H}$ pertence a r.

Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{H}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Naturalmente, $(0, 0)$ é o centro de $\mathbb{H}$. Ainda, $r\colon \alpha x + \beta y = 0$, para $\vec{n} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$. Como a reta $y = 0$ é eixo de simentria para $\mathbb{H}$, podemos supor que r não é horizontal, ou seja, que $\alpha \neq 0$. O vértice $A = (a, 0) \in \mathbb{H}$ e $A' \in \mathbb{H}$. Como o segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular a r e o seu ponto médio pertence a r, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A + \lambda\vec{n} \in r$ e $A + 2\lambda\vec{n} = A' \in \mathbb{H}$. Mas

$$A + \lambda\vec{n} \in r \Leftrightarrow \alpha(a + \lambda\alpha) + \beta(\lambda\beta) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\alpha a}{\alpha^2 + \beta^2} \ .$$

Por sua vez, dado que $\lambda \neq 0$,

$$A + 2\lambda\vec{n} \in \mathbb{H} \Leftrightarrow \frac{(a+2\alpha\lambda)^2}{a^2} - \frac{(2\beta\lambda)^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2+4a\alpha\lambda+4\alpha^2\lambda^2}{a^2} - \frac{4\beta^2\lambda^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\lambda = -\frac{\alpha}{a} \ .$$

Por outro lado,

$$\frac{-\alpha a}{\alpha^2 + \beta^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right) = -\frac{\alpha}{a} \Leftrightarrow \ a^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right) = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow -\frac{a^2\beta^2}{b^2} = \beta^2 \Leftrightarrow \beta = 0 \ ,$$

pois $a^2 + b^2 \neq 0$. Sendo assim, r é vertical. □

Teorema 51. *Sejam $\mathbb{H}$ uma hipérbole e $X_0 \in \mathbb{H}$. Existe uma única reta t tal que $t \cap \mathbb{H} = \{X_0\}$ e t não é paralela a nenhuma das assíntotas.*

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Seja r uma reta que passa por $X_0 = (x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (p, q) \neq \vec{0}$. Suponhamos que r não é paralela a nenhuma das assíntotas. Pelo exercício 58, induzimos que $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} \neq 0$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$X_0 + \lambda\vec{v} \in \mathbb{H} \Leftrightarrow \frac{(x_0+p\lambda)^2}{a^2} - \frac{(y_0+q\lambda)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2+2px_0\lambda+p^2\lambda^2}{a^2} - \frac{(y_0^2+2qy_0\lambda+q^2\lambda^2)}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{px_0}{a^2} - \frac{qy_0}{b^2}\right)\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -2\left(\frac{\frac{px_0}{a^2} - \frac{qy_0}{b^2}}{\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2}}\right).$$

A solução $\lambda = 0$ corresponde ao ponto X_0, que é elemento de $\mathbb{H} \cap r$. Portanto, $\mathbb{H} \cap r = \{X_0\}$ se, e somente se, $\frac{px_0}{a^2} - \frac{qy_0}{b^2} = 0$. Dado que $X_0 \in \mathbb{H}$, os vetores $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right)$ e $\vec{u} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$ são ambos não nulos. Além do mais,

$$\frac{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2}{b^2} = \frac{\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2}}{a^2b^2} = \frac{-1}{a^2b^2}$$

e o vetor $\vec{u}$ não é paralelo a nenhuma das assíntotas. Notamos que

$$\frac{px_0}{a^2} - \frac{qy_0}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} /\!/ \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right).$$

Tomemos por t a reta que passa por X_0 e é paralela ao vetor $\vec{u}$. Pela discussão acima, $t \cap \mathbb{H} = \{X_0\}$, t não é paralela a nenhuma das assíntotas e é a única satisfazendo estas duas condições. □

Definição 21. *Sejam $\mathbb{H}$ uma hipérbole e $X_0 \in \mathbb{H}$. A **reta tangente a** $\mathbb{H}$ **no ponto** X_0 é a reta que passa por X_0, tem interseção unitária com $\mathbb{H}$ e não é paralela a nenhuma das assíntotas. A **reta normal a** $\mathbb{H}$ **no ponto** X_0 é a reta que passa por X_0 e é perpendicular à reta tangente no mesmo ponto X_0.*

Corolário 15. *Se $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$ e $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{H}$, então a reta tangente a $\mathbb{H}$ em X_0 tem equação $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.*

Demonstração. Pela demonstração do teorema 51, a reta tangente é perpendicular ao vetor $\left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right)$. Uma vez que passa por X_0, uma equação para a reta tangente é $\left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0$. Mas

$$\left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1,$$

pois que $X_0 \in \mathbb{H}$. □

Exercício 73. *Determine equação das retas tangente e normal à hiperbole de equação $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x - 6y - 27 = 0$ no ponto $P = \left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\sqrt{2}}{2}\right)$.*

Exercício 74. *Determine as retas tangentes à hipérbole $\mathbb{H}$: $y = \frac{1}{x} - \frac{3x}{4}$ nos seus vértices.*

Teorema 52. *Seja $\mathbb{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2. Se $X_0 \in \mathbb{H}$ e $\vec{t_0}$ é vetor diretor da reta tangente a $\mathbb{H}$ em X_0, então* $\text{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \vec{t_0}) = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \vec{t_0})$

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas tal que $\mathbb{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Se $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, então, sem perda de genaralidade, podemos escrever $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Se $X_0 = (x_0, y_0)$, então a reta tangente a $\mathbb{H}$ em X_0 tem equação $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$. Se $\vec{t_0}$ é vetor paralelo à tal reta tangente, $\vec{t_0} = \lambda\vec{v_0}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, não nulo, e $\vec{v_0} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$. Pela proposição 24, $\|\overrightarrow{X_0F_1}\| = \left|\frac{cx_0}{a} + a\right|$. Sendo assim,

$$\overrightarrow{X_0F_1} \bullet \vec{v_0} = \frac{-y_0(c+x_0)}{b^2} - \frac{x_0y_0}{a^2} = \frac{-y_0c}{b^2} - x_0y_0\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) = -\frac{cy_0}{b^2} - \frac{x_0y_0c^2}{a^2b^2} = -\frac{cy_0}{ab^2}\left(\frac{cx_0}{a} + a\right)$$

Se $\theta_1 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_1}, \vec{t_0})$, então

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{X_0F_1} \bullet (\lambda\vec{v_0})}{\|\overrightarrow{X_0F_1}\| \cdot |\lambda| \cdot \|\vec{v_0}\|} = \frac{-|\lambda|cy_0}{ab^2\lambda\|\vec{v_0}\|} \cdot \frac{\left(\frac{cx_0}{a} + a\right)}{\left|\frac{cx_0}{a} + a\right|}.$$

Analogamente, se $\theta_2 = \text{ang}(\overrightarrow{X_0F_2}, \vec{t_0})$, concluímos que $\cos\theta_2 = \frac{-|\lambda|cy_0}{ab^2\lambda\|\vec{v_0}\|} \cdot \frac{\left(\frac{cx_0}{a} - a\right)}{\left|\frac{cx_0}{a} - a\right|}$. Como $X_0 \in \mathbb{H}$, os números $\left(\frac{cx_0}{a} + a\right)$ e $\left(\frac{cx_0}{a} - a\right)$ têm mesmo sinal (ver demonstração da proposição 24). Portanto $\frac{\left(\frac{cx_0}{a} + a\right)}{\left|\frac{cx_0}{a} + a\right|} = \frac{\left(\frac{cx_0}{a} - a\right)}{\left|\frac{cx_0}{a} - a\right|}$, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ e, consequentemente, $\theta_1 = \theta_2$. □

Este último resultado mostra que, se um raio de luz é emitido de um foco de uma hipérbole, ele se refletirá nela de tal forma que o outro foco está na reta suporte da trajetória do raio refletido.

10. Algumas equivalências

Seja $\Gamma\colon ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ uma cônica, lembrando que $a^2+b^2+c^2\neq 0$, e sejam

$$\Delta_1 = a+c, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}.$$

Vários teoremas puderam determinar qual cônica representava a partir dos valores de Δ_1, Δ_2 e Δ_3. Vamos revisitar alguns desses teoremas mostrando que, para alguns deles, são válidas equivalências.

Teorema 53. *Γ representa parábola se, e somente se, $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 \neq 0$.*

Demonstração. Se $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 \neq 0$, então Γ representa uma parábola, pelo teorema 16.

Agora suponhamos que Γ representa parábola. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 44 e 45, concluímos que $\Delta_2 = 0$, já que Γ não é hipérbole nem união de retas concorrentes. Finalmente, dado que Γ não é reta, nem união de retas nem é conjunto vazio, pelo teorema 5 e pelo exercício 5, concluímos que $\Delta_3 \neq 0$. □

Teorema 54. *Γ representa elipse ou circunferência se, e somente se, $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1\Delta_3 < 0$.*

Demonstração. Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1\Delta_3 < 0$, então Γ representa elipse ou circunferência, pelo teorema 29.

Agora suponhamos que Γ representa elipse ou circunferência. Pelos toeremas 44 e 45, concluímos que $\Delta_2 \geq 0$, já que Γ não é hipérbole nem união de retas concorrentes. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 > 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Visto que $\Delta_2 = ac - \frac{b^2}{4} > 0$, deduzimos que $ac > 0$ e $\Delta_1 = a + c \neq 0$. Pelo teorema 30, segue que $\Delta_1\Delta_3 < 0$, dado que Γ não é conjunto vazio nem ponto. □

Teorema 55. *Γ representa hipérbole se, e somente se, $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 \neq 0$.*

Demonstração. Se $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 \neq 0$, então Γ representa hipérbole, pelo teorema 44.

Agora suponhamos que Γ representa hipérbole. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 < 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Pelo teorema 45, $\Delta_3 \neq 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes. □

Teorema 56. *Γ representa união de retas concorrentes se, e somente se, $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 = 0$.*

Demonstração. Se $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 = 0$, então Γ representa hipérbole, pelo teorema 45.

Agora suponhamos que Γ representa união de retas concorrentes. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 < 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Pelo teorema 44, $\Delta_3 = 0$, pois Γ não é hipérbole. □

Teorema 57. *Γ representa ponto se, e somente se, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 = 0$.*

Demonstração. Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 = 0$, então Γ representa ponto, pelo teorema 30.

Agora suponhamos que somente um ponto satisfaça a equação de Γ. Pelos teoremas 16 e 5, além do exercício 5, segue que $\Delta_2 \neq 0$ pois Γ não é parábola, nem reta, nem união de retas paralelas e muito menos o conjunto vazio. Pelos teoremas 44 e 45, $\Delta_2 > 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes nem hipérbole. Como Γ não é elipse nem circunferência, pelo teorema 29, $\Delta_1\Delta_3 \geq 0$. Pelo teorema 30, segue que $\Delta_1\Delta_3 = 0$, pois Γ não reprensenta o conjunto vazio. Visto que $\Delta_2 = ac - \frac{b^2}{4} > 0$, deduzimos que $ac > 0$ e $\Delta_1 = a + c \neq 0$. Sendo assim, $\Delta_3 = 0$. □

Teorema 58. *Γ representa reta se, e somente se,* $\Delta_2 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0.$

Demonstração. Se $\Delta_2 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$, dado que $a \neq 0$ ou $c \neq 0$, segue que Γ representa reta pelo teorema 5 e pelo exercício 5.

Agora suponhamos que Γ represente uma reta. Pelos teoremas 29 e 30, $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 44 e 45, deduzimos que $\Delta_2 = 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes nem hipérbole. Dado que Γ não é parábola, pelo teorema 16, segue que $\Delta_3 = 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos $a \neq 0$. Sendo assim, $c = \frac{b^2}{4a}$. Pelo lema 3, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = 0$ e $e = \frac{bd}{2a}$. Pelo teorema 5, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = 0$ e $f = \frac{d^2}{4a}$. Portanto $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \left(\frac{b^2}{4a}\right)\left(\frac{d^2}{4a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{bd}{2a}\right)^2 = 0$. □

Teorema 59. *Γ representa união de duas retas paralelas distintas se, e somente se, $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ e ainda $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} < 0$ ou $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ e $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} < 0$. Caso $a = 0$, segue que $b = 0 \neq c$. Pelo lema 3, $\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ c & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = 0$ e deduzimos que $d = 0$, o que é um absurdo pois, neste caso, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} = 0$. Logo $a \neq 0$ e, pelo teorema 5, Γ representa união de duas retas paralelas distintas.

Agora suponhamos que Γ represente união de duas retas paralelas distintas. Pelos teoremas 29 e 30, induzimos que $\Delta_2 \leq 0$, visto que Γ não é conjunto vazio, nem ponto, nem elipse, e muito menos circunferência. Pelos teoremas 44 e 45, deduzimos que $\Delta_2 = 0$, pois Γ não é união de retas concorrentes nem hipérbole. Dado que Γ não é parábola, pelo teorema 16, segue que $\Delta_3 = 0$. Se $a \neq 0$, então $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} < 0$, pelo teorema 5. Se $a = 0$, então $b = 0 \neq c$ e, pelo exercício 5, segue que $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} < 0$. □

Exercício 75. *Mostre que, se $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$, então $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$.*

Teorema 60. *Γ representa o conjunto vazio se, e somente se, uma das condições abaixo é verdadeira:*

(1) $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1\Delta_3 > 0$, *(2) $\Delta_2 = \Delta_3 = 0 < \begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix}$, ou* *(3) $\Delta_2 = \Delta_3 = 0 < \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.*

Demonstração. Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1\Delta_3 > 0$, então Γ é cônica vazia pelo teorema 30. Se $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ e $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, então $af > \frac{d^2}{4}$, $af > 0$ e $a \neq 0$. Consequentemente, pelo teorema 5, Γ representa o conjunto vazio. Analogamente o mesmo acontece se $\Delta_2 = \Delta_3 = 0 < \begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$.

Suponhamos que nenhum ponto do plano satistaça a equação de Γ. Pelos teoremas 44 e 45, deduzimos que $\Delta_2 \geq 0$. Caso $\Delta_2 > 0$, pelos teoremas 29 e 30, induzimos que $\Delta_1\Delta_3 > 0$. Logo vale *(1)*. Caso $\Delta_2 = 0$, visto que Γ não representa parábola, deduzimos que $\Delta_3 = 0$, pelo teorema 16. Pelo teorema 59, temos que $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$ e $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \geq 0$. Já o teorema 58 nos faz concluir que os dois determinantes não podem ser simultaneamente nulos. Portanto, $\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{vmatrix} > 0$ ou $\begin{vmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} > 0$, ou seja, vale *(2)* ou *(3)*. □